Уральский институт экономики, управления и права

Смирнов А.И.

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Екатеринбург
2004

АННОТАЦИЯ

Учебно-методическое пособие ориентировано на студентов экономических специальностей вузов. Помимо теоретических вопросов, демонстрируются приемы и методы решения наиболее важных задач, некоторые из этих задач являются разработками автора.

Усвоение материала облегчают упражнения, снабженные ответами.

Тема 1. Прямоугольная декартова система координат. Параметрический способ задания отрезка

Прямоугольная декартова система координат

Прямую с заданным на ней положительным направлением будем называть *осью.*

Ось с заданной на ней начальной точкой и масштабом (т.е. единичным отрезком) называется *координатной осью*. Масштаб задается еще одной точкой E (*масштабирующей*), помимо начальной.

Точка E задает на оси еще и направление. Направление от точки O к точке E назовем *положительным*; противоположное направление, соответственно - *отрицательным*.

рис.1

Координатная ось задает две *полуоси*. Часть прямой, идущая от начальной точки в положительном (отрицательном) направлении, называется *положительной* (*отрицательной*) *полуосью*. Будем обозначать координатную ось с начальной точкой O и масштабирующей точкой E через $l(O,E)$.

Координатой произвольной точки M на координатной оси назовем длину отрезка OM со знаком плюс, если точка M лежит на положительной полуоси, и со знаком минус, если точка M лежит на отрицательной полуоси. Координате начальной точки припишем нулевое значение.

Таким образом, каждой точке M координатной оси поставлено в соответствие однозначно определенное действительное число x - ее координата, и обратно, по каждому действительному числу x можно найти единственную точку M координатной оси с координатой x. Мы получили взаимно однозначное соответствие между точками прямой (координатной оси) и действительными числами.

Точку M с координатой x будем обозначать через $M(x)$.

Возьмем две взаимно перпендикулярные координатные оси $l_1(0,\ E_1)$ и $l_2(0,\ E_2)$ с общей начальной точкой O и одинаковым масштабом $(OE_1 = OE_2)$:

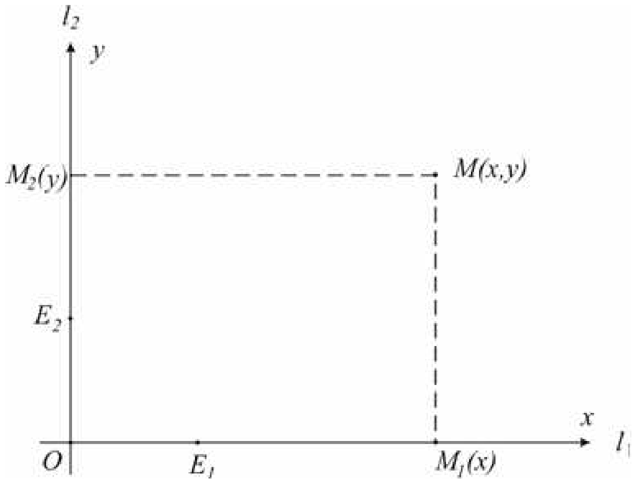


рис. 2

Будем называть систему двух взаимно перпендикулярных осей $l_1(0,\ E_1)$ и $l_2(0,\ E_2)$ *прямоугольной декартовой системой координат* плоскости. Плоскость, наделенную декартовой системой координат, назовем *декартовой плоскостью*.

Ось l_1 обычно называют *осью абсцисс*, а ось l_2 - *осью ординат.*

Обычно ось абсцисс проводится горизонтально, и в качестве положительного направления на ней выбирается направление слева направо (т.е. точка E_1 располагается правее точки O).

Если задана начальная точка на плоскости и некоторый отрезок с началом в этой точке, то возможны два направления вращения отрезка вокруг начальной точки – против часовой стрелки и по часовой стрелке. Первое принято называть *положительным*, второе – *отрицательным* направлением.

Различают *правые* и *левые* системы координат, в зависимости от того, в каком направлении – положительном или отрицательном – происходит вращение отрезка OE_1, когда кратчайшим путем стремятся совместить точку E_1 с точкой E_2, тем самым совмещая ось абсцисс с осью ординат.

Как правило, рассматривают правые системы координат. В этом случае ось ординат направлена вверх.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры на координатные оси, получим точки M_1 и M_2 на осях абсцисс и ординат соответственно. Пусть $M_1 = M_1(x)$ и $M_2 = M_2(y)$, тогда точке M соответствует пара чисел (x, y). Зафиксируем порядок их следования - будем считать первым в этой паре число x, вторым – число y, что соответствует заданию порядка следования осей координат: сначала ось абсцисс, затем ось ординат. Пара чисел (x, y) с заданным порядком их следования называется *упорядоченной парой* чисел.

Таким образом, каждой точке M плоскости соответствует упорядоченная пара чисел (x, y).

Обратно, если задана упорядоченная пара чисел (x', y'), то найдем на осях абсцисс и ординат соответственно точки $M_1' = M_1'(x')$ и $M_2' = M_2'(y')$, затем точку M' – точку пересечения прямых, параллельных осям и проходящих через точки M_1' и M_2'. Теперь упорядоченной паре чисел (x', y') соответствует некоторая точка плоскости M'.

Очевидно, при этом разным точкам соответствуют разные упорядоченные пары чисел, и обратно, разным упорядоченным парам чисел соответствуют разные точки плоскости.

Указанные числа x, y будем называть *координатами* точки M на плоскости (обозначение: $M(x, y)$).

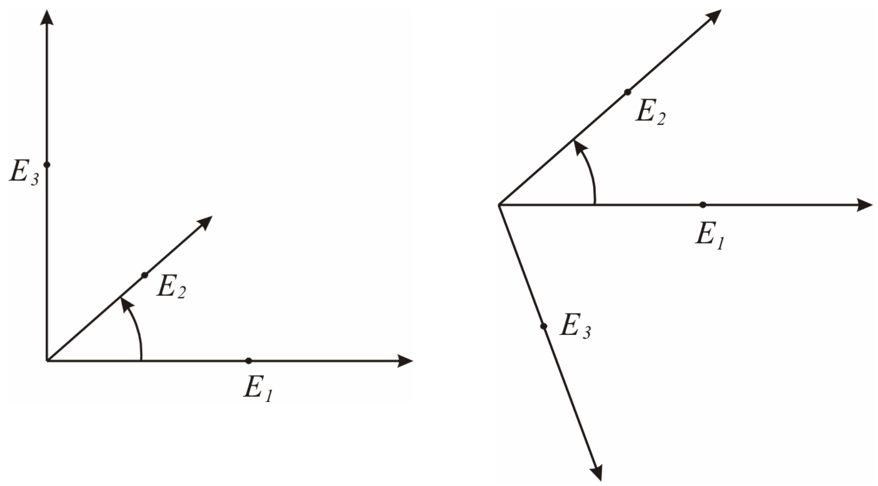
Ось абсцисс называют еще осью Ox или осью x, ось ординат – осью Oy или осью y; вместе их называют *осями координат*. Оси координат делят плоскость на четыре координатных четверти (координатных угла); обычно их нумеруют против часовой стрелки, начиная с угла с положительными координатами.

Расстоянием между двумя точками M_1 и M_2 называется длина отрезка M_1M_2, их соединяющего. Если $M_1 = M_1(x_1, y_1),\ M_2 = M_2(x_2, y_2)$, то расстояние равно

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (1)$$

Аналогично вводится декартова система координат пространства. Мы здесь определим *прямоугольную* систему координат (рис.3), которая, как правило, и будет далее использоваться, т.к. *геометрическим* соотношениям в прямоугольной системе соответствуют более простые *алгебраические* соотношения (между координатами геометрических объектов). Построение произвольных декартовых систем координат, связанное с понятием вектора, будет произведено позднее.

Пусть заданы три взаимно перпендикулярные оси $l_1(O,E_1),\ l_2(O,E_2),\ l_3(O,E_3)$ с общей начальной точкой O.



а) б)

рис.3

Система координат $\{l_1(O,E_1),\ l_2(O,E_2),\ l_3(O,E_3)\}$ пространства называется *правой* (рис. 3а), если система координат $\{\, l_1(O,\, E_1),\, l_2(O,\, E_2)\}$ является *правой* системой координат плоскости для наблюдателя в точке E_3; в противном случае эта система координат называется *левой* (рис.3б).

Каждой точке пространства M ставится при этом в соответствие упорядоченная тройка чисел (x, y, z), где $M_1(x),\, M_2(y),\, M_3(z)$ - основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на оси Ox, Oy и Oz соответственно (рис.4). Как и выше, для плоскости, это соответствие является взаимно-однозначным, и упорядоченная тройка чисел (x, y, z), называемых *координатами* точки M (обозначение: $M(x, y, z)$), позволяет однозначно восстановить исходную точку M в пространстве.

Обычно выбирают одинаковые масштабы на осях, т.е. $OE_1 = OE_2 = OE_3$.

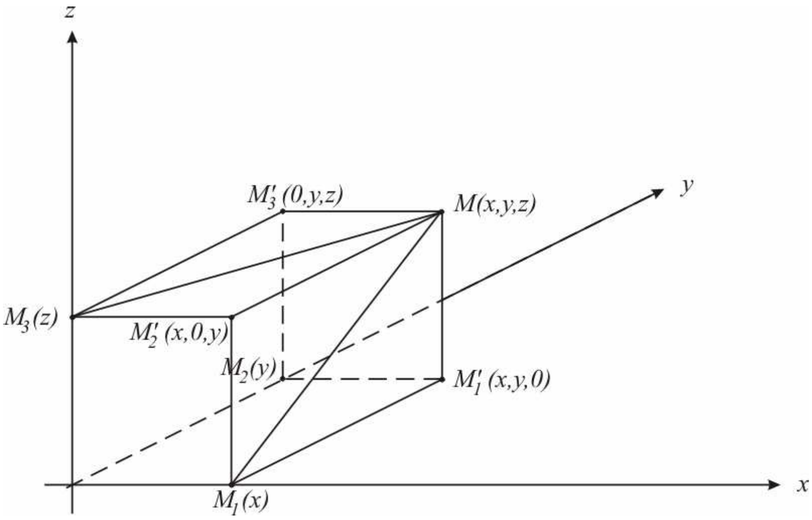


рис.4.

Расстояние между точками пространства $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ равно

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \qquad (2)$$

Параметрическое представление отрезка

Пусть заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ пространства.

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\rho(A, M) + \rho(M, B) = \rho(A, B) \qquad (3)$$

Обозначим через $M(x,y,z)$ произвольную точку M с координатами

$$\begin{cases} x(\alpha) = (1-\alpha)\,x_1 + \alpha x_2, \\ y(\alpha) = (1-\alpha)\,y_1 + \alpha y_2, \\ z(\alpha) = (1-\alpha)\,z + \alpha z_2, \end{cases} \qquad \alpha \in [0,1] \tag{4}$$

Тогда

$$\rho(A,M) = \alpha\,\rho(A,B), \qquad \rho(M,B) = (1-\alpha)\;\rho(A,B), \tag{5}$$

и, следовательно, точка M удовлетворяет условию (3) и принадлежит отрезку AB. Обратно, всякая точка отрезка AB представима в виде (4). Параметры α и $1-\alpha$ при этом, как видно из (5), равны отношению длин отрезков AM и MB соответственно к длине отрезка AB.

Будем кратко обозначать точку отрезка AB с координатами (4) через $M[\alpha]$ или $M_{AB}[\alpha]$. Заметим, что порядок точек A и B в приведенном обозначении важен, т.к. увеличению параметра α от нуля до единицы соответствует движение точки $M_{AB}[\alpha]$ от точки A к точке B.

Из геометрического смысла параметра α легко получить параметрическое представление середины отрезка. Действительно, если точка $M(x,y,z)$ - середина отрезка AB, где $A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2)$, то $\alpha = \frac{1}{2}$ и соотношения (4) превращаются в следующую формулу для координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ x = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (6)$$

Для получения параметрического представления отрезка прямой или плоскости достаточно взять в соотношении (4) соответственно одно или два первых равенства. Параметры α и $1-\alpha$ имеют при этом те же границы изменения и тот же геометрический смысл, что и выше.

Задачи и упражнения

Задача 1. Определить, образуют ли точки $A(2,-3),\ B(-1,1),\ C(-2,-1)$ треугольник.

Решение. Три точки только в том случае не образуют треугольник, если больший из образованных каждыми двумя точками трех отрезков содержит третью точку. Найдем попарные расстояния между точками:

$$AB = 5,\ BC = \sqrt{5},\ AC = 2\sqrt{5}.$$

Отрезком наибольшей длины является отрезок AB. Поскольку $AC + CB = 3\sqrt{5} \neq AB$, то точка C не лежит на отрезке AB, и точки A, B, C образуют треугольник.

Задача 2. Используя параметрическое представление отрезка AB, где $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $p:q$.

Решение. Точка M внутри отрезка имеет координаты (4), где, согласно (5), $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{AM}{MB} = \frac{p}{q}$. Отсюда $\alpha = \frac{p}{p+q},\ \ 1-\alpha = \frac{q}{p+q}$ и

$$x=\frac{q}{p+q}x_1+\frac{p}{p+q}x_2,\quad y=\frac{q}{p+q}y_1+\frac{p}{p+q}y_2,\quad z=\frac{q}{p+q}z_1+\frac{p}{p+q}z_2. \qquad (7)$$

Замечание. При решении задачи получено, что точка $M_{AB}[\alpha]$ делит отрезок AB в отношении $\alpha:(1-\alpha)$.

Задача 3. Определить, пересекает ли отрезок AB, где $A(-4,1),\ B(-1,-2)$, оси координат.

Решение. Координаты произвольной точки M отрезка AB имеют вид

$$x=(1-\alpha)(-4)+\alpha(-1)=3\alpha-4,\ \ y=(1-\alpha)1+\alpha(-2)=-3\alpha+1$$

Решая поочередно уравнения $x=0,\ \ y=0,$ получаем в качестве решений соответственно $\alpha_1=\frac{4}{3},\ \alpha_2=\frac{1}{3}.$ Поскольку $\alpha_1\notin[0,1],\ \alpha_2\in[0,1],$ отрезок AB пересекает лишь ось абсцисс в точке $M(-3,0).$

Задача 4. Заданы точки $A(0,-2),\ B(3,4),\ C(-1,3), D(3,-3).$ Определить, пересекаются ли отрезки AB и CD, и, если пересекаются, в каком отношении их делит точка пересечения.

Решение. Произвольные точки M и M' отрезков AB и CD соответственно имеют координаты

$$x(\alpha)=(1-\alpha)\cdot 0+\alpha\cdot 3=3\alpha,\quad y(\alpha)=(1-\alpha)(-2)+\alpha\cdot 4=6\alpha-2,$$

$$x'(\alpha')=(1-\alpha')(-1)+\alpha'\cdot 3=4\alpha'-1,\quad y'(\alpha')=(1-\alpha')\cdot 3+\alpha'(-3)=-6\alpha'+3.$$

Отрезки пересекаются тогда и только тогда, когда система уравнений

$$x(\alpha) = x'(\alpha'), \quad y(\alpha) = y'(\alpha'),$$

имеет решение при $\alpha \in [0,1]$, $\alpha' \in [0,1]$.

Решая систему,

$$3\alpha = 4\alpha' - 1, \quad 6\alpha - 2 = -6\alpha' + 3,$$

получаем $\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha' = \frac{1}{2}$, и точка пересечения O' имеет координаты $O'(1,0)$.

Эта точка делит отрезок AB в отношении $1:2$ и отрезок CD в отношении $1:1$ (т.е. является его серединой).

Задача 5. Доказать, что при $\alpha \notin [0,1]$ точка $M = M[\alpha]$ с координатами (4) лежит на прямой AB вне отрезка AB.

Решение. Докажем, что $MA + AB = MB$ при $\alpha < 0$ и $MB + AB = MA$ при $\alpha > 1$.

Для сокращения вычислений будем рассматривать случай декартовой плоскости.

Действительно, имеем

$$MA^2 = [(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - x_1]^2 + [(1-\alpha)y_1 + \alpha y_2 - y_1]^2 = \alpha^2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2],$$

$$MB^2 = [(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 - x_2]^2 + [(1-\alpha)y_1 + \alpha y_2 - y_2]^2 = (1-\alpha)^2[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2],$$

т.е. $MA = |\alpha| AB$, $MB = |1-\alpha| AB$.

Если $\alpha < 0$, то $MA = -\alpha AB$, $MB = (1-\alpha)AB$ и

$MA + AB = -\alpha AB + AB = (1-\alpha)AB = MB$. Если же $\alpha > 1$, то

$MA = \alpha AB$, $MB = (\alpha - 1)AB$ и $MB + AB = (\alpha - 1)AB + AB = \alpha AB = MA$.

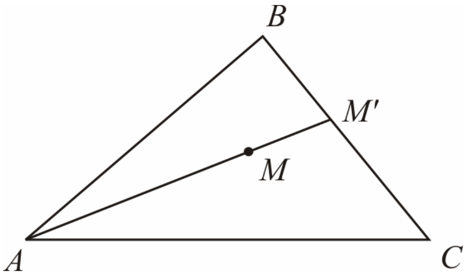
Следовательно, точка M лежит на прямой AB вне отрезка AB.

Задача 6. Доказать, что каждая точка $M(x, y, z)$ плоскости треугольника ABC, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, может быть представлена в виде

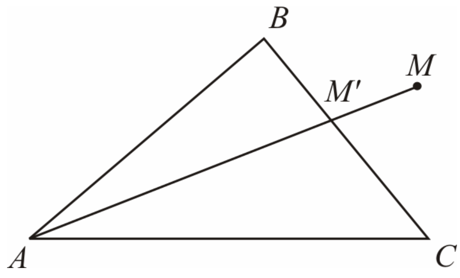
$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_{3,} \quad y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_{3,} \quad z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \qquad (8)$$

При этом точка M лежит внутри или вне треугольника ABC в зависимости от того, являются ли все числа α, β, γ положительными или среди них есть отрицательные.

Решение. Пусть сначала точка M лежит внутри треугольника ABC (рис.5а).



а)



б)

рис.5

Продолжим прямую AM до пересечения со стороной BC в точке $M'(x', y')$. Эта точка лежит внутри отрезка BC, и поэтому при некотором $\lambda \in [0,1]$ справедливо

$$x' = (1-\lambda)x_2 + \lambda x_3, \quad y' = (1-\lambda)y_2 + \lambda y_3, \quad z' = (1-\lambda)z_2 + \lambda z_3.$$

В свою очередь, точка M лежит внутри отрезка AM', и поэтому при некотором $\lambda' \in [0,1]$

$$x = (1-\lambda')x_1 + \lambda' x' = (1-\lambda')x_1 + \lambda'(1-\lambda)x_2 + \lambda'\lambda x_3.$$

Аналогично

$$y = (1-\lambda')y_1 + \lambda' y' = (1-\lambda')y_1 + \lambda'(1-\lambda)y_2 + \lambda'\lambda y_3,$$
$$z = (1-\lambda')z_1 + \lambda' z' = (1-\lambda')z_1 + \lambda'(1-\lambda)z_2 + \lambda'\lambda z_3.$$

Обозначая $1-\lambda'=\alpha,\ \lambda'(1-\lambda)=\beta,\ \lambda'\lambda=\gamma,$ получаем $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ и $\alpha+\beta+\gamma=1-\lambda'+\lambda'(1-\lambda)+\lambda'\lambda=1.$

Если же точка M лежит вне треугольника ABC (рис.5б), то одна из прямых, соединяющих ее с вершинами треугольника, обязательно пересечет одну из сторон в точке M' - как и выше, являющейся внутренней точкой стороны BC. Поэтому и на этот раз $\lambda\in[0,1].$ Но в отличие от предыдущего случая точка M лежит вне отрезка AM'; поэтому либо $\lambda'<0,$ либо $\lambda'>1,$ и, следовательно, либо $\beta=\lambda'(1-\lambda)<0$ и $\gamma=\lambda'\lambda<0,$ либо $\alpha=1-\lambda'<0.$

Задача 7. Доказать, что прямоугольник наибольшей площади, вписанный в прямоугольный треугольник, делит его стороны пополам.

Решение. Пусть треугольник имеет катеты длиной a и b соответственно. Введем прямоугольную систему координат, направив оси координат по катетам треугольника (рис.6).

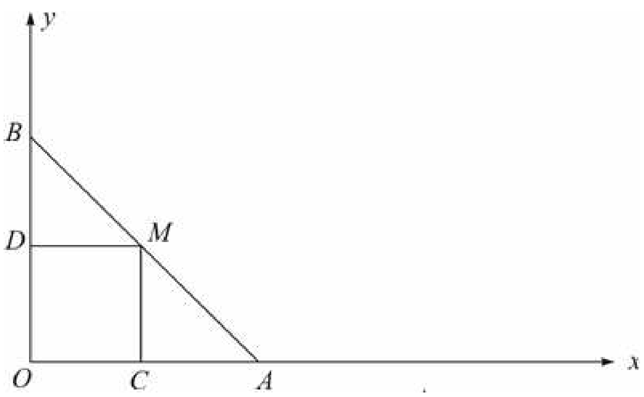


рис.6

Вершина M прямоугольника, лежащая на гипотенузе AB треугольника, имеет координаты (4), где $x_1=a,\ y_1=0;\ x_2=0,\ y_2=b,$ т.е. $x=(1-\alpha)a,\ y=\alpha b,\ \alpha\in[0,1]$. Поэтому площадь прямоугольника $ODMC$ равна $S=\alpha(1-\alpha)ab.$

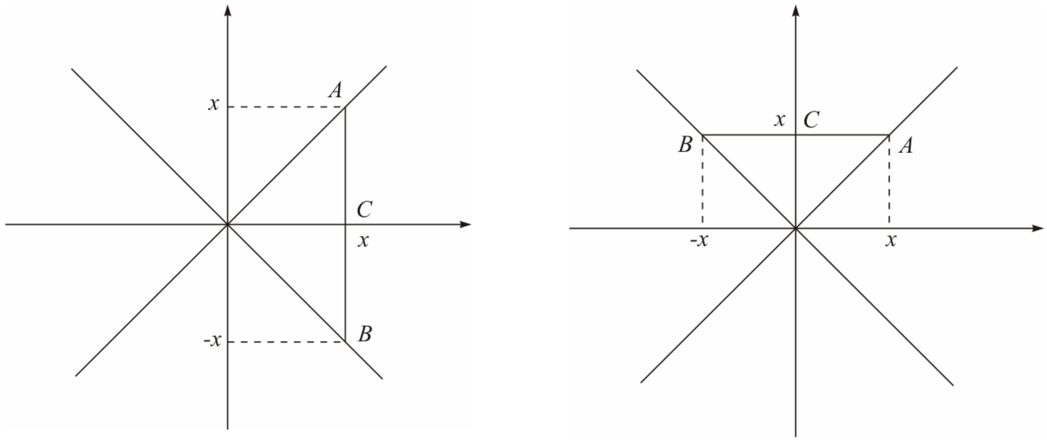
Для нахождения максимальной площади необходимо максимизировать величину $\alpha(1-\alpha)$ при условии $\alpha \in [0,1]$.

Рассматривая верное неравенство $\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0,$ получаем цепочку неравенств-следствий: $\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4} \geq 0,$ $\alpha(\alpha-1) \geq -\frac{1}{4},$ $\alpha(1-\alpha) \leq \frac{1}{4},$ т.е. максимум этой величины равен $\frac{1}{4}$ и достигается он при $\alpha=\frac{1}{2}.$ Прямоугольник имеет при этом размеры $\frac{a}{2} \times \frac{b}{2}$ и $S=\frac{ab}{4}.$

Это означает, что точка M – середина гипотенузы AB, а точки C и D - середины соответствующих катетов треугольника.

Задача 8. Концы отрезка AB лежат на биссектрисах координатных углов, а его середина – на одной из осей координат. Доказать, что точки A и B симметричны относительно одной из осей координат.

Решение. Пусть точки A и B имеют соответственно координаты $A(x_1, x_1),$ $B(x_2, -x_2).$ Тогда середина C отрезка AB имеет координаты $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1-x_2}{2}\right).$



а) б)

рис.7

Если точка C лежит на оси Ox (рис.7а), то $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 = x_2 = x.$ Но тогда точки $A(x,x)$ и $B(x,-x)$ симметричны относительно оси Ox.

Если же точка C лежит на оси Oy (рис.7б), то $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 = -x_2 = x.$ В этом случае точки $A(x,x)$ и $B(x,-x)$ симметричны относительно оси Oy .

Упражнения

1. Отметить на декартовой плоскости точки с указанными координатами. Указать среди них симметричные относительно осей координат, начала координат и биссектрис координатных углов.

   $A_1(1,2),\quad A_2(2,1),\quad A_3(3,-1),\quad A_4(-2,1),\quad A_5(-3,1),\quad A_6(-2,-1),$

   $A_7(-1,2),\quad A_8(-1,-2),\quad A_9(3,1),\ A_{10}(-3,-1).$

2. Используя параметрическое представление, определить, пересекает ли отрезок AB биссектрисы координатных углов

   а) $A(-4,3),\ B(2,0)$; б) $A(1,-2),\ B(-1,-3)$.

3. Используя параметрическое представление отрезков AB и CD, определить, пересекаются ли отрезки. В случае положительного ответа найти, в каком отношении их делит точка пересечения.

а) $A(-1,2),\ B(3,-6);\ C(2,0),\ D(0,4)$; б) $A(-2,0),\ B(1,3);\ C(3,-1),\ D(-3,2)$.

4. Найти длины сторон и площадь треугольника ABC, где

а) $A(-2,3),\ B(2,1),\ C(0,-1)$; б) $A(1,4),\ B(2,0),\ C(-2,-2)$.

5. Проверить, является ли треугольник ABC прямоугольным

а) $A(3,-4),\ B(-3,4),\ C(5,0)$; б) $A(-2,3),\ B(2,1),\ C(0,1)$;

в) $A(3,-4),\ B(-3,4),\ C(4,3)$;

6. Проверить, является ли треугольник ABC равнобедренным

а) $A(-1,3),\ B(2,0),\ C(4,5)$; б) $A(0,-1),\ B(4,3),\ C(-1,4)$.

7. Проверить, является ли четырехугольник $ABCD$ параллелограммом. Найти точку пересечения его диагоналей.

а) $A(-1,-2),\ B(0,1),\ C(2,2), D(1,-1)$; б) $A(-1,2),\ B(3,1),\ C(2,-3), D(-2,-2)$;

в) $A(-3,-1),\ B(1,2),\ C(3,0), D(-1,-3)$.

8. Проверить, является ли четырехугольник $ABCD$ прямоугольником. Найти точку пересечения его диагоналей.

а) $A(1,0),\ B(0,2),\ C(2,4), D(3,2)$; б) $A(-1,1),\ B(3,3),\ C(4,1), D(0,-1)$.

9. Проверить, является ли четырехугольник $ABCD$ ромбом. Найти точку пересечения его диагоналей.

а) $A(-2,6),\ B(1,1),\ C(6,-2), D(3,3)$; б) $A(-2,0),\ B(-1,3),\ C(2,4), D(1,1)$.

10. Проверить, является ли четырехугольник $ABCD$ квадратом. Найти точку пересечения его диагоналей.

а) $A(-1,-1), B(-2,1), C(0,2), D(1,0)$; б) $A(-2,0), B(0,1), C(1,-1), D(-1,-2)$.

11. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC, используя их параметрическое представление. Проверить, что в точке пересечения они делятся в отношении 2:1.

а)) $A(-1,2),\ B(1,-1),\ C(4,1)$; б) $A(-1,-4),\ B(-3,-1),\ C(2,1)$.

Тема 2. Свободные векторы. Умножение вектора на скаляр, сумма и разность векторов. Критерии коллинеарности и компланарности векторов

Свободные векторы

Если заданы две точки трехмерного пространства, то, выбирая одно из двух возможных направлений отрезка, заключенного между ними, получаем направленный отрезок, или *вектор.*

Вектор с начальной точкой A и конечной точкой B будем обозначать через $\overrightarrow{AB}.$

Всякие две точки A и B трехмерного пространства дают два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, называемых взаимно *противоположными*.

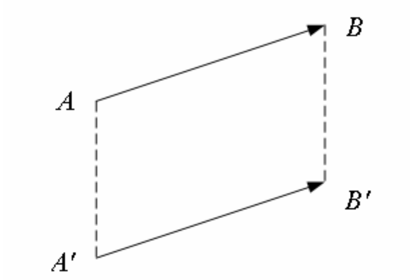
Если точки A и B совпадают, то назовем соответствующий вектор *нулевым*: $\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ (обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$) назовем длину AB составляющего его отрезка: $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|=AB.$

Будем считать два вектора *равными*, если их можно совместить с помощью параллельного переноса, т.е. если, перемещая один из них параллельно самому себе до совпадения начальных точек, получим совпадение и конечных точек.

Поскольку при таком понимании равенства точка приложения (начальная точка) не имеет значения, будем называть такие векторы *свободными.*

а)



б)

рис. 1

Для случая, когда векторы не лежат на одной прямой, это означает, что фигура $ABB'A'$ - плоская и образует параллелограмм (рис.1б); если же векторы лежат на одной и той же прямой, то понятие параллельного переноса означает перемещение вдоль этой прямой (рис.1а), что соответствует пониманию параллельности прямых в широком смысле (включая их совпадение).

Пусть задан ненулевой вектор $\overrightarrow{AB}$. Точки A и B задают прямую с направлением на ней от точки A к точке B. Прямыми, параллельными прямой AB, можно заполнить все трехмерное пространство; откладывая на каждой из них от произвольной точки вектор, равный вектору $\overrightarrow{AB}$ в изложенном выше понимании, получим некоторое направление в пространстве.

Таким образом, задание одного вектора $\overrightarrow{AB}$ трехмерного пространства генерирует во всем пространстве определенное направление.

Направления, определяемые противоположными векторами, будем называть *противоположными*.

Понятие равенства векторов в терминах длины векторов и понимаемого таким образом направления, можно сформулировать следующим образом: два вектора трехмерного пространства *равны* тогда и только тогда, когда совпадают их длины и направления.

Векторы, направления которых совпадают или противоположны, называются *коллинеарными.*

Векторы (в количестве не менее трех), которые, будучи отложенными от одной и той же точки пространства, лежат в одной плоскости, называются *компланарными.*

Линейные операции над векторами

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - произвольные свободные векторы трехмерного пространства. Выберем любую точку A и отложим от нее вектор $\vec{a}$, затем от полученной конечной точки B этого вектора отложим вектор $\vec{b}$.

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем называть вектор $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{1}$$

Рассмотрим отдельно случай, когда векторы-слагаемые $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными (рис.2).

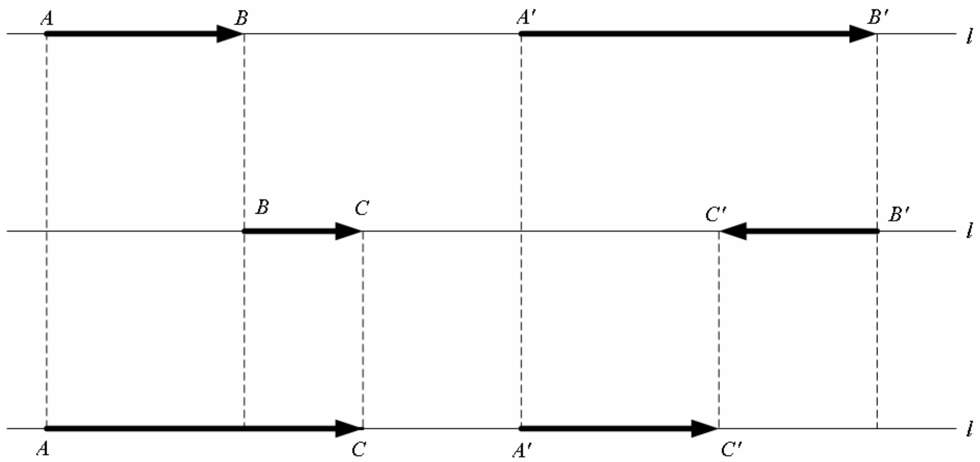
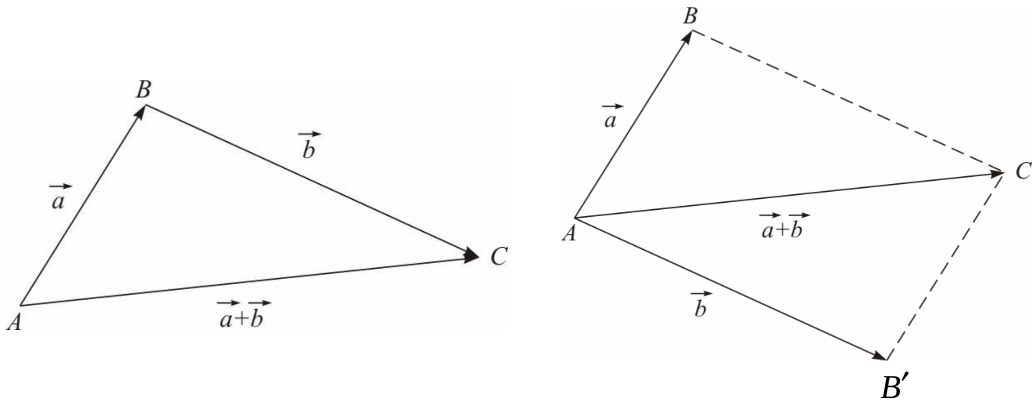


рис.2

В этом случае, если векторы-слагаемые - одного направления, то длина их суммы равна сумме длин слагаемых; если они имеют разные направления, то длина суммы равна разности длин большего и меньшего векторов, а направление совпадает с направлением большего вектора.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются коллинеарными, то определение суммы векторов реализует так называемое *правило треугольника*, в соответствии с геометрической интерпретацией (рис.3а).



а) б)

рис.3

Очевидно, тот же результат можно получить, если сначала отложить от точки A вектор $\overrightarrow{AB'} = \vec{b},$ а затем от точки B' отложить вектор $\overrightarrow{B'C} = \vec{a},$ поскольку фигура $ABCB'$ является параллелограммом. Сумма векторов изображается при этом диагональю $\overrightarrow{AC}$ параллелограмма (рис.3б). Отсюда еще одно название правила сложения векторов – *правило параллелограмма*.

Таким образом, результат операции сложения не зависит от порядка сомножителей.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{2}$$

Это свойство называется *коммутативностью* сложения.

Обозначим вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, через $-\vec{a}.$ Тогда

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}. \qquad (3)$$

Следующая иллюстрация показывает, что вектор, противоположный к сумме векторов, равен сумме векторов, противоположных к слагаемым:

$$-(\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{a})+(-\vec{b}). \qquad (4)$$

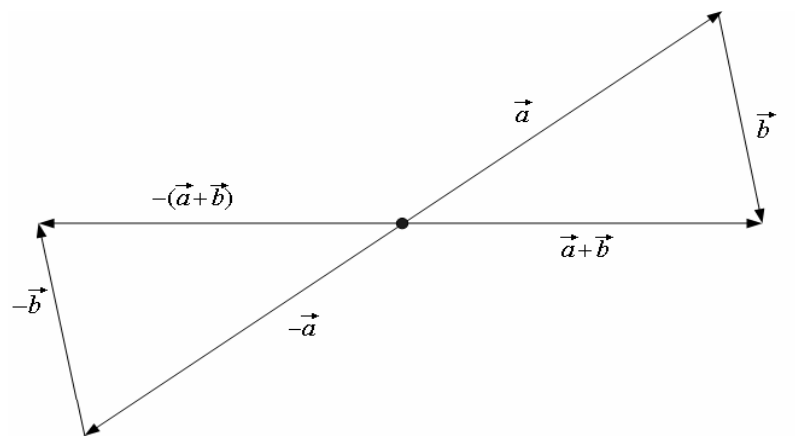


рис.4

Операцию сложения векторов последовательно можно обобщить на произвольное число слагаемых.

Пусть заданы три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$ Откладывая первый из них от произвольной точки, а каждый следующий – от конечной точки предыдущего вектора, получим, как видно из рис.5, для сумм $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ и $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ один и тот же вектор, с началом в начальной точке первого вектора $\vec{a}$ и концом в конечной точке последнего вектора $\vec{c}.$

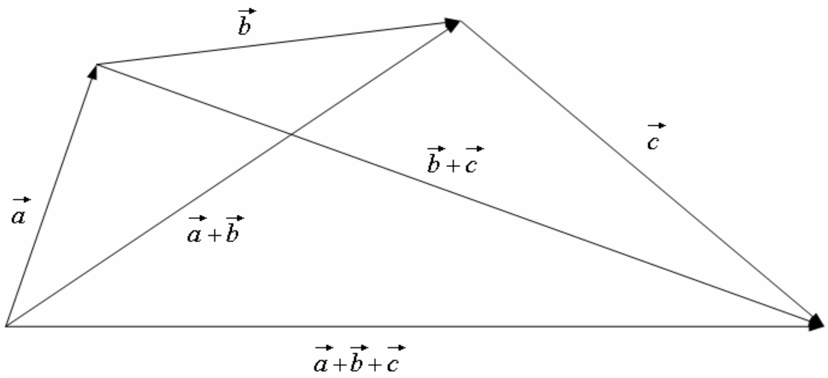


рис. 5

Этот вектор и называется *суммой* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ трех векторов, а правило его получения в соответствии с его геометрическим смыслом называется *правилом результирующей или замыкающей*.

Результат сложения при этом, как видно из рис.5, не зависит от расстановки скобок в сумме:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}). \tag{5}$$

Это свойство называется *ассоциативностью* операции сложения.

Используя свойства ассоциативности и коммутативности сложения, нетрудно получить, что результат операции сложения не зависит и от порядка слагаемых.

Аналогично последовательно определяется сумма четырех и вообще произвольного числа векторов. Очевидно, и для суммы произвольного количества векторов справедливо *правило замыкающей*, а также свойство независимости результата от порядка и группировки слагаемых.

Правило замыкающей применимо к любым векторам, независимо от того, компланарны они или нет. Для трех не компланарных векторов это правило называют *правилом параллелепипеда*: если отложить векторы-слагаемые и результат от одной точки, то сумма совпадет с диагональю параллелепипеда (рис.6)

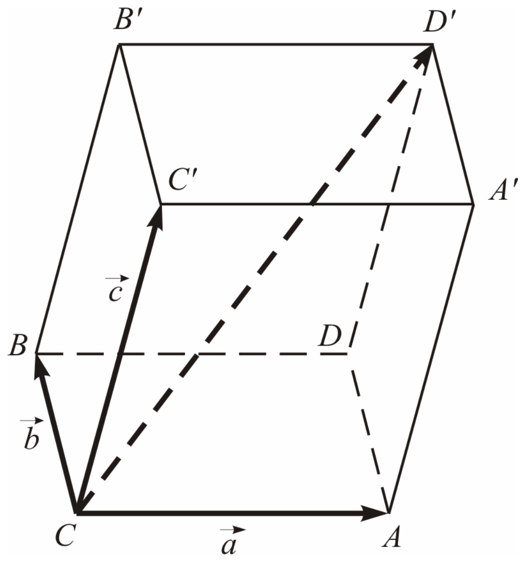


рис.6

Здесь $\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB},\ \vec{c} = \overrightarrow{OC},\ \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OD'}.$

Разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется как решение уравнения

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{x}. \qquad (6)$$

Это уравнение имеет единственное решение - вектор $\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Тем самым операция вычитания векторов сведена к операциям сложения и взятия обратного вектора.

Непосредственно из определения разности вытекают следующие простейшие свойства:

$$\vec{a} - \vec{0} = \vec{a},\ \vec{0} - \vec{a} = -\vec{a},\ \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}. \qquad (7)$$

Введем еще одну операцию над векторами – операцию умножения на скаляр.

Пусть заданы вектор $\vec{a}$ и действительное число λ. Результатом умножения (*произведением*) скаляра λ на вектор $\vec{a}$ (обозначение: $\lambda \cdot \vec{a},\ \lambda\vec{a}$) называется вектор, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположно ему при $\lambda < 0$.

При $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$ по определению считаем результатом умножения нулевой вектор:

$$0 \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \tag{8}$$

Будем обозначать факт одинакового или противоположного направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ соответственно; тогда определение операции умножения скаляра на вектор дают равенства

$$\lambda a \begin{cases} \uparrow\uparrow \vec{a}, & \lambda > 0, \\ \uparrow\downarrow \vec{a}, & \lambda < 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|. \tag{10}$$

Непосредственно из определения умножения вытекают равенства

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},\ (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a},\ \lambda \cdot (-\vec{a}) = -\lambda\vec{a}. \tag{11}$$

Нижеследующая алгебраическая характеристика коллинеарности и компланарности является очевидной переформулировкой приведенных выше их геометрических определений.

Утверждение 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда при некоторых $\lambda,\ \mu,$ не равных одновременно нулю, справедливо

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}. \tag{12}$$

Утверждение 2. Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда при некоторых $\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0$ справедливы равенства

$$\vec{a} = \lambda\vec{b},\ \vec{b} = \mu\vec{a}. \tag{13}$$

Утверждение 3. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда при некоторых $\lambda, \mu, \nu,$ не равных одновременно нулю, справедливо равенство

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}. \tag{14}$$

Утверждение 4. Ненулевые попарно не коллинеарные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда при некоторых $\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0$ справедливо равенство

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}. \tag{15}$$

Умножение на скаляр обладает свойством *ассоциативности*:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}, \tag{16}$$

Следующие свойства связывают операции сложения (вычитания) и умножения на скаляр.

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \tag{17}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}, \tag{18}$$

$$\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b}, \tag{19}$$

Свойства (17), (18) – называются *дистрибутивностью* умножения относительно сложения (чисел и векторов соответственно), свойство (19) - *дистрибутивностью* умножения относительно вычитания векторов.

Если одна из точек плоскости или пространства – некоторая фиксированная точка O - выделена в качестве общей начальной точки свободных векторов, то каждый свободный вектор $\vec{a}$ имеет своего единственного представителя – равный ему вектор $\overrightarrow{OA}$ (называемый *радиус-вектором* точки A) с началом в указанной точке. В этом случае для задания вектора достаточно одной (конечной) точки, радиус-вектор которой равен данному вектору, и вектор может быть отождествлен с его конечной точкой. В дальнейшем этот подход будет использоваться для определения координат вектора, совпадающих с координатами его конечной точки, поэтому все соотношения для радиус-векторов точек фактически являются соотношениями для координат их конечных точек.

Соотношение (1), определяющее сложение свободных векторов, для векторов с фиксированным началом (или просто *векторов*, в отличие от *свободных векторов*), превращается в равенство

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}. \tag{20}$$

Отсюда получаем выражение вектора $\overrightarrow{AB}$ через радиус-векторы его начальной и конечной точек:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}. \tag{21}$$

Задачи и упражнения

Задача 1. Доказать для радиус-вектора середины C отрезка AB равенство

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}). \tag{22}$$

Решение. Имеем

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}).$$

и равенство (22) справедливо.

Задача 2. Доказать для радиус-вектора точки C прямой AB параметрическое представление

$$\overrightarrow{OC}=(1-\alpha)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}. \qquad (23)$$

Решение. Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, поэтому, в силу (13),

$$\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}\,,\ \ |\alpha|=\frac{AC}{AB}.$$

Отсюда

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\alpha\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\left(1-\alpha\right)\overrightarrow{OA}+\alpha\overrightarrow{OB}.$$

Естественно, что и здесь конечная точка *C* принадлежит отрезку *AB* тогда и только тогда, когда $\alpha\in\left[0,1\right]$ (см. задачу 5 темы 1); в этом случае коэффициенты α и $\left(1-\alpha\right)$ суммы (23) имеют тот же геометрический смысл, что и выше, при рассмотрении параметрического представления точек отрезка (соотношения (5) темы 1).

Задача 3. Выразить радиус-вектор точки, превращающей треугольник в параллелограмм, через радиус-векторы его вершин.

Решение. Очевидно, существуют три точки $A',\ B',\ C',$ каждая из которых превращает треугольник ABC в параллелограмм.

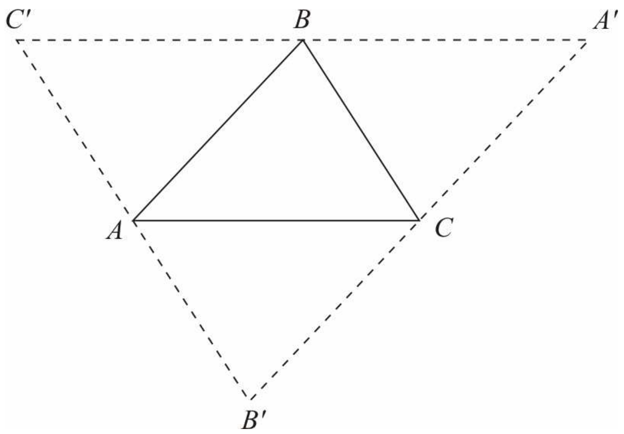


рис.7

Найдем, например, радиус-вектор точки A'. Имеем:

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

Аналогично получаем

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}, \qquad \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

Задача 4. Выразить вектор биссектрисы треугольника через векторы его сторон.

Решение. Используя параметрическое представление (23) радиус-вектора точки *D* в отрезке *BC* , считая начальной точкой вершину A, получаем

$$\overrightarrow{AD} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}, \quad \text{где } \lambda = \frac{BD}{BC}.$$

Обозначим $\angle BAD = \angle CAD = \varphi$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. (рис.9)

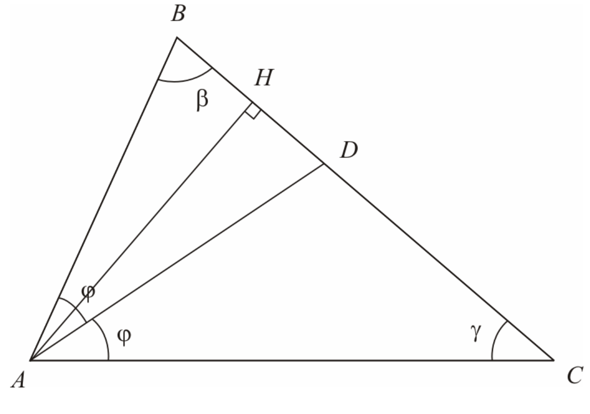


рис. 9

Имеем $\lambda = \dfrac{BD}{BD+CD} = \dfrac{1}{1+\dfrac{CD}{BD}}$. Найдем отношение $\dfrac{CD}{BD}$.

По теореме синусов из треугольника ABD и треугольника ACD получаем

$$\frac{BD}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin\beta}, \quad \frac{CD}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin\gamma}.$$

Отсюда $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Пусть AH - высота к стороне BC, тогда

$$\sin\beta = \frac{AH}{AB}, \quad \sin\gamma = \frac{AH}{AC} \quad \text{и} \quad \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}.$$

Поэтому

$$\lambda = \frac{1}{1+\dfrac{CD}{BD}} = \frac{1}{1+\dfrac{AC}{AB}} = \frac{AB}{AB+AC}, \quad 1-\lambda = \frac{AC}{AB+AC},$$

и, окончательно, получаем

$$\overrightarrow{AD} = \frac{AC}{AB+AC}\overrightarrow{AB} + \frac{AB}{AB+AC}\overrightarrow{AC}. \qquad (24)$$

Задача 5. Выразить вектор высоты прямоугольного треугольника через векторы его сторон.

Решение. Обозначая угол $\angle BAD$ (рис.10) через φ, получаем

$$\angle ABD = \angle CAD = 90^\circ - \varphi, \ \angle ACD = \varphi, \ \frac{BD}{AD} = \frac{AB}{AC}, \ \frac{CD}{AD} = \frac{AC}{AB}, \ \frac{CD}{BD} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2.$$

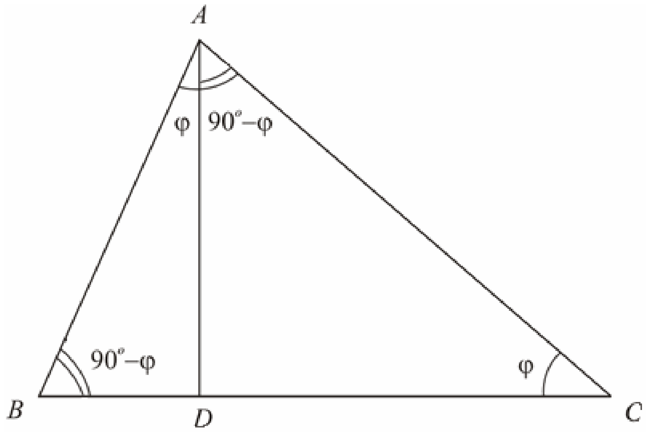


рис.10

При решении предыдущей задачи мы получили, что $\overrightarrow{AD}=(1-\alpha)\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AC}$, где $\alpha=\dfrac{1}{1+\dfrac{CD}{BD}}$. Подставляя в это выражение найденную выше величину $\dfrac{CD}{BD}$, получаем

$$\alpha=\frac{AB^2}{AB^2+AC^2},\quad 1-\alpha=\frac{AC^2}{AB^2+AC^2}$$

и, следовательно,

$$\overrightarrow{AD}=\frac{AC^2}{AB^2+AC^2}\overrightarrow{AB}+\frac{AC^2}{AB^2+AC^2}\overrightarrow{AC}. \tag{25}$$

Задача 6. Пусть точки A, B, C образуют треугольник. Доказать, что его медианы пересекаются в одной точке O', радиус-вектор которой равен

$$\overrightarrow{OO'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right), \tag{26}$$

и делятся этой точкой в отношении 2:1.

Решение. Пусть AD - медиана (рис.11) и точка O_1 на ней такова, что $\frac{AO_1}{O_1D}=\frac{2}{1}$. (рис. 11)

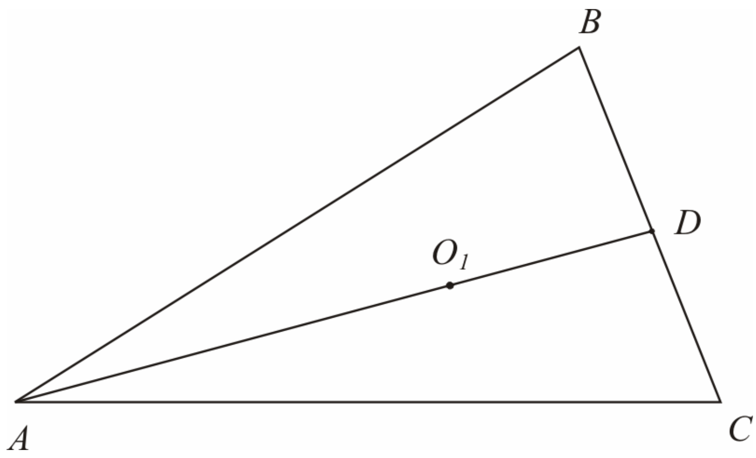


рис. 11

Тогда, согласно (22), $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ и

$$\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO_1}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Итак,

$$\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right). \qquad (27)$$

Проводя те же построения и выкладки для остальных двух медиан, получаем для соответствующих точек O_2 и O_3 на них то же выражение (27), поэтому эти точки совпадают, и для этой общей точки пересечения медиан справедливо равенство (26).

Задача 7. Доказать равенство

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0} \qquad (28)$$

для векторов медиан треугольника ABC (рис.12).

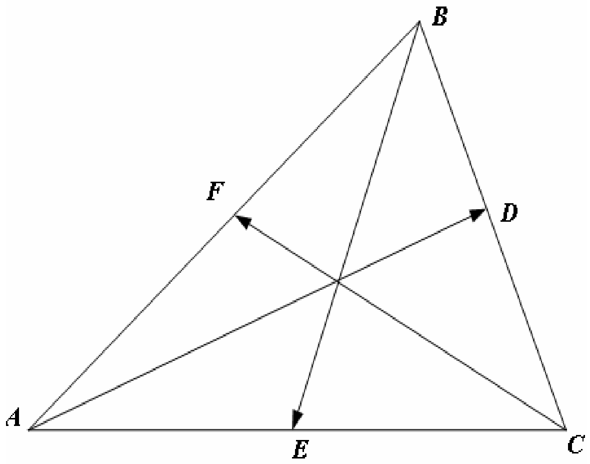


рис.12

Решение. Имеем

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right),\ \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right),\ \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right).$$

Суммируя эти равенства, получаем требуемое равенство.

Задача 8. Доказать, что точка O' пересечения медиан треугольника ABC - единственная точка, для которой справедливо равенство

$$\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C} = \vec{0} \qquad (29)$$

Решение. Суммируя равенства

$$\overrightarrow{O'A} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA},\ \ \overrightarrow{O'B} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EB},\ \ \overrightarrow{O'C} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FC},$$

и учитывая результат предыдущей задачи, получаем требуемое соотношение.

Предположим теперь, что есть еще одна точка O'', для которой справедливо равенство $\overrightarrow{O''A} + \overrightarrow{O''B} + \overrightarrow{O''C} = \vec{0}$.

Вычитая из этого равенства равенство (29), получаем

$$\left(\overrightarrow{O''A} - \overrightarrow{O'A}\right) + \left(\overrightarrow{O''B} - \overrightarrow{O'B}\right) + \left(\overrightarrow{O''C} - \overrightarrow{O'C}\right) = 3\overrightarrow{O''O'} = \vec{0}.$$

т.е. $\overrightarrow{O'O''}=\vec{0}$ и точка O'' совпадает с точкой пересечения медиан O'.

Задача 9. Доказать, что точки $A,\ B,\ C$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда при некоторых $p,\ q,\ r,$ не всех одновременно равных нулю, справедливо

$$p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}=\vec{0},\quad p+q+r=0. \tag{30}$$

Решение. Если справедливо (30), то $p=-(q+r)$ и

$$\vec{0}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}=q\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+r\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=q\overrightarrow{AB}+r\overrightarrow{AC},$$

т.е. справедливо равенство

$$q\overrightarrow{AB}+r\overrightarrow{AC}=\vec{0}. \tag{31}$$

Хотя бы один из коэффициентов q или r - ненулевой, поэтому, в силу утверждения 1, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, и точки $A,\ B,\ C$ лежат на одной прямой.

Обратно, если точки $A,\ B,\ C$ лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны и, в силу утверждения 1, при некоторых $q,\ r,$ одновременно не равных нулю, справедливо равенство (31). Обозначим $p=-(q+r),$ тогда $p+q+r=0$ и

$$\vec{0}=q\overrightarrow{AB}+r\overrightarrow{AC}=q\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+r\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC},$$

т.е. справедливо равенство (30).

Упражнения.

1. Докажите равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ и приведите его геометрическую интерпретацию.

2. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы. При каких направлениях этих векторов длина их суммы

а) максимальна; б) минимальна.

3. Какова связь между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

а) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$; б) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$; в) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

4. Какова связь между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если вектор их суммы $\vec{a}+\vec{b}$ направлен по биссектрисе угла между ними.

5. Выразить направляющий вектор биссектрисы треугольника через векторы его сторон.

6. Выразить векторы сторон параллелограмма через векторы его диагоналей.

7. Сформулировать признак параллелограмма, использующий понятие вектора.

8. Доказать, что вектор, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме векторов двух других сторон, если все указанные векторы направлены так, что их конечные точки принадлежат одной и той же стороне четырехугольника.

9. В параллелограмме $ABCD$ указать следующие векторы

а) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$; б) $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$; в) $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

г) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}$; д) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

10. В четырехугольнике $ABCD$ точки E и F - середины диагоналей AC и BD. Выразить вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы сторон четырехугольника.

11. В четырехугольнике $ABCD$ точки A', B', C', D' - середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Доказать, что векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ противоположны.

12. Доказать равенство $\overrightarrow{O'D}+\overrightarrow{O'E}+\overrightarrow{O'F}=\vec{0},$ где точка O' - точка пересечения медиан AD, BE, CF треугольника $ABC.$

13. Выразить вектор, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, через векторы его ребер.

14. Точки M и N лежат на противоположных сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ и $M = M_{AD}[\alpha],\ N = N_{BC}[a'].$ Доказать, что четырехугольник $ABMN$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha'.$

15. Доказать, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда при некоторых $p, q, r, s,$ одновременно не равных нулю, справедливо

$$p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OD}=\vec{0},\quad p+q+r+s=0. \qquad (32)$$

16. Доказать, что точка D лежит в плоскости треугольника ABC тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \qquad (33)$$

причем точка D лежит внутри треугольника или вне его, в зависимости от того, являются ли все коэффициенты α, β, γ положительными или среди них есть хоть один отрицательный.

Тема 3. Проекция вектора на прямую и плоскость. Общая декартова система координат на плоскости. Координаты линейной комбинации векторов. Критерии коллинеарности и компланарности векторов. Скалярное произведение векторов. Критерий ортогональности векторов

Проекция точки на прямую вдоль прямой

Пусть заданы две пересекающиеся прямые l и l_1. *Проекцией точки M плоскости вдоль прямой l_1 на прямую l* (обозначение: $\pi_l^{l_1}(M)$) называется точка M' пересечения прямой l_1', параллельной прямой l_1 и проходящей через точку M, с прямой l.

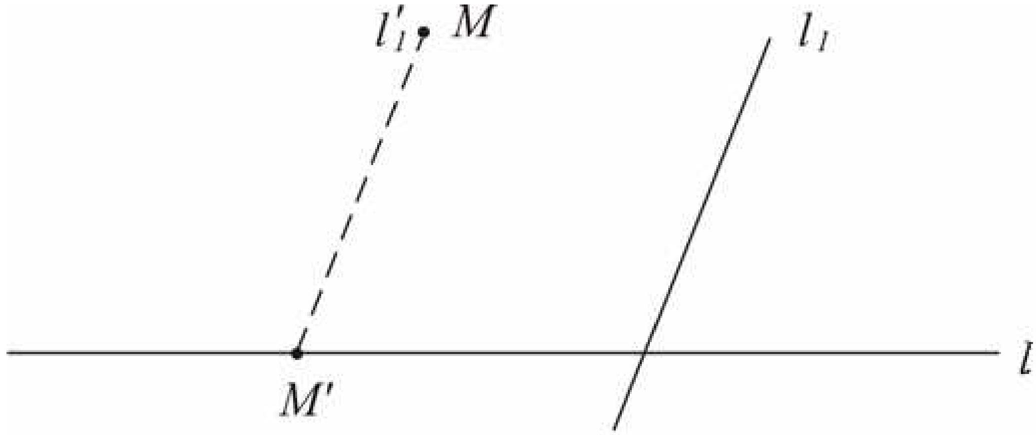


рис.1

Проекция точки на плоскость вдоль прямой

Пусть заданы плоскость Π и не параллельная ей прямая l.

Проекцией точки M пространства на плоскость Π вдоль прямой l (обозначение: $\pi_{\Pi}^{l}(M)$) называется точка M'

пересечения прямой l', параллельной прямой l и проходящей через точку M , с плоскостью Π.

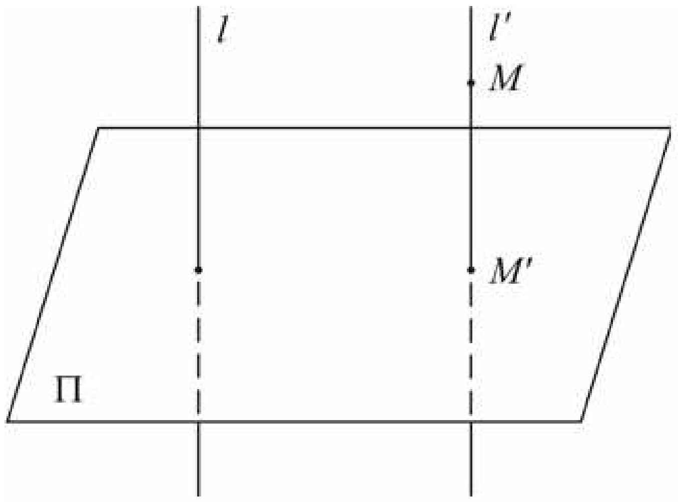


рис.2

Чаще рассматривается *ортогональная (прямоугольная) проекция*, когда заданные прямые, или прямая и плоскость, перпендикулярны. В этом случае нет необходимости каждый раз указывать направление проектирования, задается лишь место нахождения проекции – прямая или плоскость.

Проекция вектора

Пусть задан вектор $\overrightarrow{AB}$. Обозначим проекции составляющих его точек A, B через A', B' соответственно. Тогда, по определению, *проекцией* $\vec{\pi}\left(\overrightarrow{AB}\right)$ *вектора* $\overrightarrow{AB}$ называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$.

$$\overrightarrow{A'B'} = \vec{\pi}\left(\overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow A' = \pi(A),\ B' = \pi(B) \tag{1}$$

Утверждение 1.

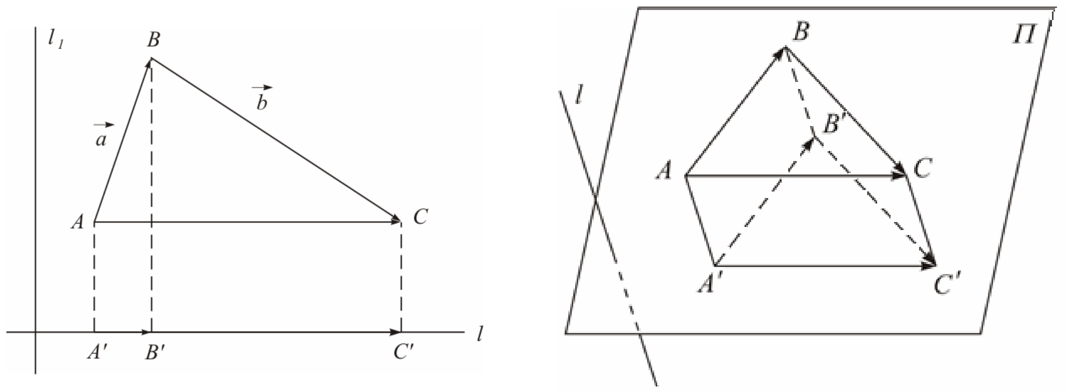
(1) Проекция суммы (разности) векторов есть сумма (разность) проекций этих векторов:

$$\vec{\pi}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \vec{\pi}(\vec{a}) \pm \vec{\pi}(\vec{b}). \tag{2}$$

(2) Проекция произведения вектора на скаляр равна произведению этого скаляра на проекцию вектора:

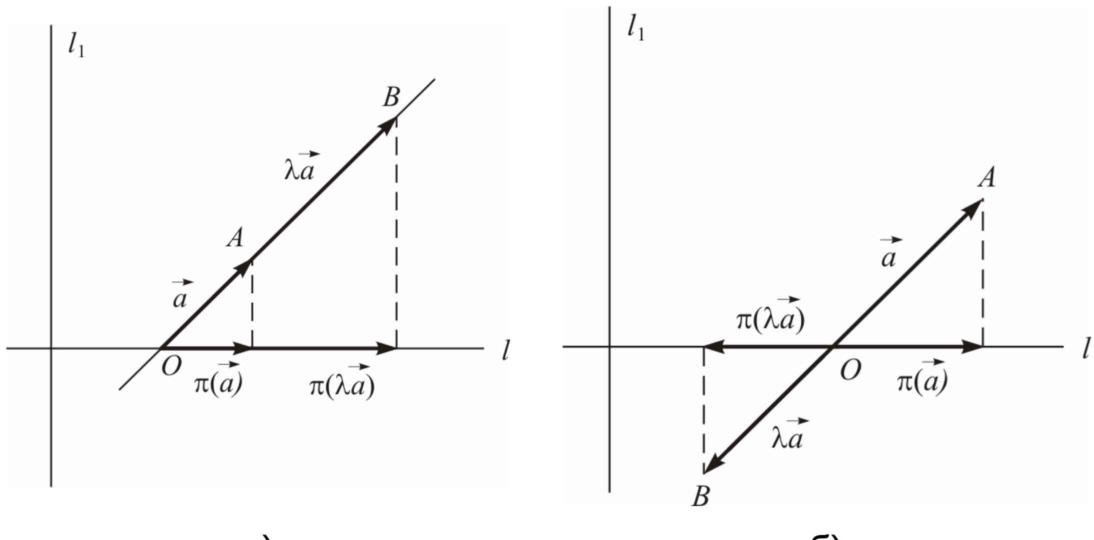
$$\vec{\pi}(\lambda\vec{a}) = \lambda\vec{\pi}(\vec{a}). \qquad (3)$$

Справедливость этих свойств демонстрируют приведенные ниже иллюстрации:



а) б)

рис.3



а) б)

рис.4

Пусть заданы векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2, ...,\ \vec{a}_k\ \ (k > 1),$ рассмотрим произвольную их *линейную комбинацию* $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\,\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k$ с числовыми коэффициентами $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_k.$

Обе части предыдущего утверждения можно объединить в одном.

Утверждение 2. Проекция любой линейной комбинации векторов равна линейной комбинации их проекций с теми же коэффициентами:

$$\vec{\pi}\left(\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\,\vec{a}_2+\ldots+\alpha_k\vec{a}_k\right)=\alpha_1\vec{\pi}\left(\vec{a}_1\right)+\alpha_2\vec{\pi}\left(\vec{a}_2\right)+\ldots+\alpha_k\vec{\pi}\left(\vec{a}_k\right). \quad (4)$$

Будем обозначать плоскость, определяемую двумя неколлинеарными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, через $\Pi(\vec{a},\vec{b})$. В соответствии с нашим пониманием (свободного) вектора, эти плоскости определяются с точностью до параллельного переноса.

Если прямая l определяется вектором $\vec{a}$, то проекцию вектора $\vec{b}$ на прямую l будем обозначать $\vec{\pi}_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)$.

Будем различать длину проекции вектора $l=\left|\vec{\pi}_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)\right|=\left|\vec{b}\right|\left|\cos\alpha\right|$ и «длину со знаком», определяемую следующим образом:

$$\pi_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)=\begin{cases}+l, & \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\\ -l, & \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\end{cases} \quad (5)$$

Очевидно,

$$\pi_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cos\alpha, \quad (6)$$

где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

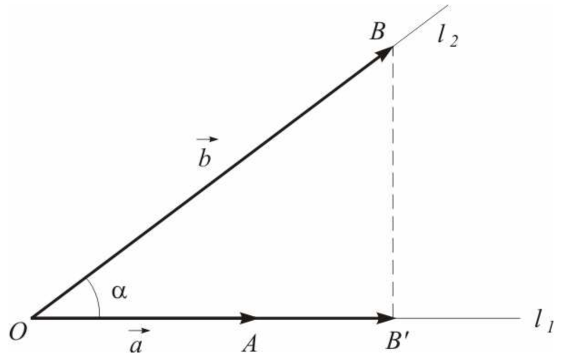


рис.5

Естественно, абсолютная величина «длины со знаком» равна длине проекции

$$\left|\pi_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)\right| = \left|\vec{\pi}_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)\right| \tag{7}$$

Общая декартова система координат на плоскости

Выберем некоторую произвольную точку O плоскости в качестве начальной и отложим от нее два любых не коллинеарных вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Будем называть прямые (с направлением), определяемые векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, *координатными осями*, а сами векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ - *направляющими векторами* координатных осей.

Поскольку всякий вектор есть сумма его проекций на координатные оси, из коллинеарности векторов-проекций направляющим векторам получаем

Утверждение 3. Произвольный вектор $\vec{a}$ плоскости можно единственным образом представить в виде линейной комбинации направляющих векторов:

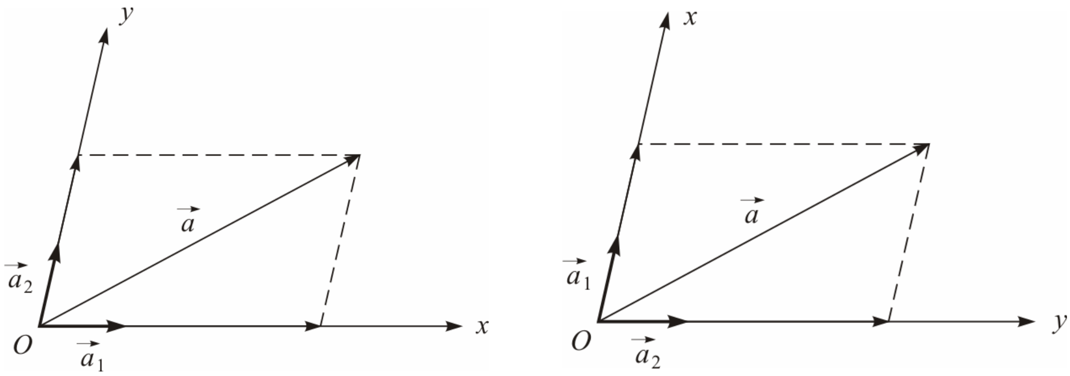
$$\vec{a} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2.$$

Единственность этого представления является следствием того, что направляющие векторы не коллинеарны.

Коэффициенты x, y этой линейной комбинации, взятые в указанном порядке, назовем *координатами* вектора $\vec{a}$ в системе координат $\{O, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.

В фиксированной системе координат можно отождествить вектор $\vec{a}$ с набором его координат: $\vec{a} = (x, y)$, поскольку по этому набору вектор $\vec{a}$ восстанавливается однозначно.

Координатные оси, определяемые векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, иногда обозначают Ox и Oy соответственно.



а) б)

рис.6

Как и ранее, будем различать *правые* (рис.6а) и *левые* (рис.6б) системы координат, в зависимости от того, в положительном или отрицательном направлении происходит вращение оси Ox вокруг точки O при совмещении ее с осью Oy кратчайшим путем.

Пару направляющих векторов в этом случае также будем называть *правой* или *левой* соответственно.

Пусть теперь M - произвольная точка плоскости. Ее *координатами* (обозначение: $M(x, y)$) будем называть координаты вектора $\overrightarrow{OM}=(x,y),$ называемого *радиус – вектором* точки M в заданной системе координат $\{O,\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$.

Таким образом, каждой точке M плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара чисел (x,y) - ее координаты, и обратно, каждой упорядоченной паре действительных чисел (x',y') соответствует единственная точка плоскости $M'(x',\ y')$.

Чаще рассматривают *прямоугольную* декартову систему координат $\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.В этом случае векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ ортогональны (обычно их считают также единичными: $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ и называют *единичными ортами*). Такую систему координат мы будем называть просто *прямоугольной*, в отличие от *общей декартовой системы координат*.

Общая декартова система координат трехмерного пространства

Пусть O - любая точка пространства, и векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ не являются компланарными.

Отложим эти векторы от общей точки O и назовем направленные прямые, определяемые векторами $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$, *координатными осями* (обозначения: Ox, Oy, Oz соответственно). Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$, как и выше, назовем *направляющими векторами* координатных осей. Зафиксируем порядок следования направляющих векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$; этот порядок, в свою очередь, установит порядок следования координатных осей $Ox, Oy, Oz.$

Каждая пара координатных осей определяет *координатную плоскость*, координатные плоскости делят все пространство на восемь *координатных октантов*.

Проектируя вектор $\vec{a}$ пространства на плоскость Oxy и ось Oz, с учетом разложения (8) получаем аналогичное

Утверждение 4. Произвольный вектор $\vec{a}$ пространства можно единственным образом представить в виде линейной комбинации направляющих векторов

$$\vec{a} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3.$$

Единственность этого представления является следствием не компланарности направляющих векторов.

Коэффициенты $x,\ y,\ z$ этой линейной комбинации, взятые в порядке следования направляющих векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3,$ назовем *координатами вектора* $\vec{a}$ в системе координат $\{O,\ \vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}.$

В фиксированной системе координат можно отождествить вектор $\vec{a}$ с набором его координат:

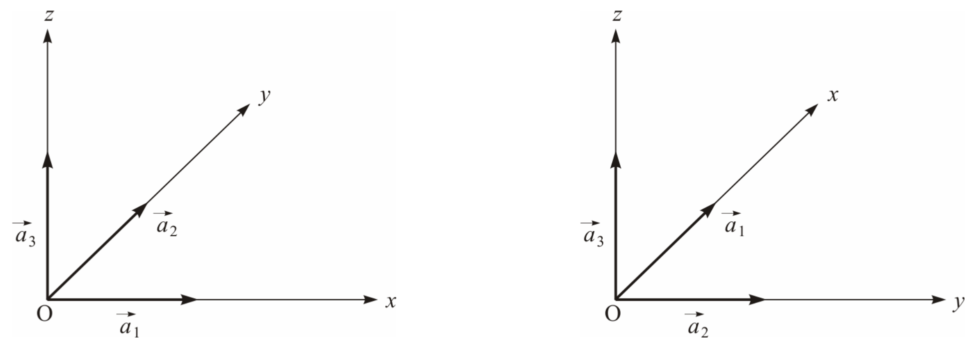
$$\vec{a} = ($$

поскольку по этому набору вектор $\vec{a}$ восстанавливается однозначно.

Координатами произвольной точки M пространства назовем, как и в случае плоскости, координаты ее *радиус–вектора* $\overrightarrow{OM}$: если $\overrightarrow{OM} = (x, y, z),$ то и $M = M(x, y, z)$.

Как и в случае плоскости, будем различать *правые* и *левые* системы координат.

Систему координат $\{O, Ox, Oy, Oz\}$ назовем *правой*, если вращение координатной оси Ox вокруг точки O в координатной плоскости Oxy при совмещении ее кратчайшим путем с осью Oy будет происходить в *положительном* направлении, если наблюдать с конечной точки вектора $\vec{a}_3$ (рис.7а); в противном случае система координат называется *левой* (рис.7б).



а) б)

рис.7.

Соответствующую тройку (направляющих) векторов мы также будем называть при этом *правой* или *левой*.

В дальнейшем, для определенности, будем рассматривать только *правые* системы координат.

Будем, как и в случае плоскости, называть полученную систему координат *общей* декартовой системой координат, в отличие от *прямоугольной* декартовой системы координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, состоящей из взаимно ортогональных друг другу векторов единичной длины *(единичных ортов)* :

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3, \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3|. \qquad (1$$

Координаты линейной комбинации векторов

Пусть вектор $\vec{c}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Используя свойства линейных операций над векторами, получаем

Утверждение 5. Координаты линейной комбинации векторов равны такой же линейной комбинации соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\Rightarrow\vec{c}=(c_1,c_2,c_3),\quad c_i=\alpha a_i+\beta b_i\quad(i=1,2,3). \qquad (11)$$

Следствие 1. Если $A=A(a_1,a_2,a_3),\ B=B(b_1,b_2,b_3),$ то

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3). \qquad (1$$

Теперь критерии коллинеарности и компланарности векторов (утверждения 1-4 темы 2) можно сформулировать в терминах координат.

Пусть $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3).$ Обозначим $I_0(\vec{a})=\{i:a_i=0\}.$

Заметим, что нулевой вектор коллинеарен любому другому, поэтому в следующих двух утверждениях считаем, что рассматриваемые векторы являются ненулевыми.

Утверждение 6. Ненулевые векторы $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3).$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда соответствующие их координаты либо одновременно равны нулю, либо пропорциональны:

$$I_0(\vec{a})=I_0(\vec{b})=I_0,\ \frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}\ (\forall i,j\notin I_0). \qquad (13)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не имеют нулевых координат $(I_0=\varnothing),$ то условие коллинеарности имеет вид

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

Пусть $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\ \vec{c}=(c_1,c_2,c_3).$

Утверждение 7. Ненулевые не коллинеарные векторы компланарны тогда и только тогда, когда координаты каждого вектора являются одинаковыми (т.е. зависящими только от самого вектора, но не от номера координаты) линейными комбинациями остальных векторов:

$$a_i = \lambda b_i + \mu c_i \quad (i = 1, 2, 3; \ \lambda \neq 0, \ \mu \neq 0).$$ (15)

Скалярное произведение векторов

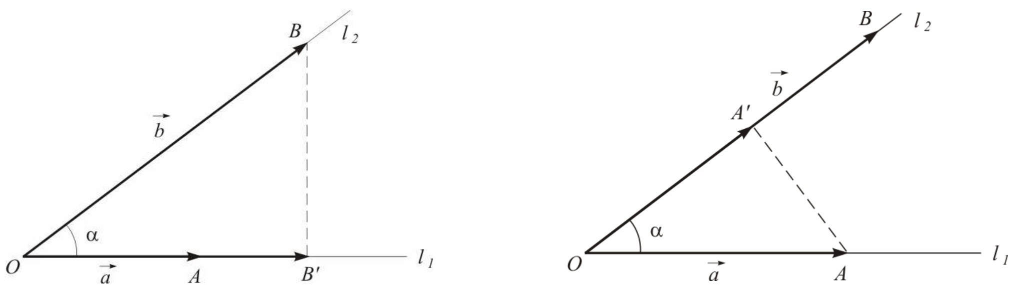
Рассмотрим еще одну операцию над векторами, ставящую в соответствие каждой паре векторов некоторое действительное число.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется величина

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha,$$

где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Как обычно, точку – символ умножения будем опускать.

Отложим не коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от общей точки O, тогда $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \ \overrightarrow{OB} = \vec{b},$ и пусть l_1 и l_2 соответственно – координатные оси, определяемые этими векторами.



а) б)

рис.8

Рассматривая ортогональные проекции каждого из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ на прямую, определяемую другим вектором (рис.8), получаем из (6)

$$\pi_{\vec{a}}(\vec{b}) = \left|\vec{b}\right| \cos\alpha, \ \pi_{\vec{b}}(\vec{a}) = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha.$$ (17

Поэтому скалярное произведение можно представить в виде

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \pi_{\vec{a}}(\vec{b}), \ \vec{a}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \pi_{\vec{b}}(\vec{a}), \qquad (18$$

где $\pi_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)$, $\pi_{\vec{b}}\left(\vec{a}\right)$- «длина со знаком» (5) проекции вектора.

В случае совпадения векторов величину $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ будем называть *скалярным квадратом* и обозначать $\vec{a}^2$:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 .$$

Утверждение 8. Справедливы следующие свойства

(1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a},$

(2) $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}\left(\alpha\vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a}\vec{b}\right),$

(3) $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$

Коммутативность (1) операции скалярного произведения очевидна; ассоциативность (2) легко проверяется перебором ситуаций $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ и $\alpha = 0$ с учетом свойства (10) темы 2; дистрибутивность (3) доказывается применением представления (18).

Непосредственно из определения скалярного произведения вытекает

Утверждение 9. Ненулевые векторы ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0.$$

Используя представления векторов-сомножителей в виде линейной комбинации единичных векторов координатных осей, получаем выражения для величины скалярного произведения через координаты векторов-сомножителей.

Утверждение 10. Если $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, то

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Утверждение 11. Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

С учетом этих утверждений получаем критерий ортогональности векторов соответственно плоскости и пространства.

Утверждение 12. Два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда сумма попарных произведений соответствующих координат этих векторов равна нулю:

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Вспоминая выражение для скалярного квадрата, получаем длину вектора как функцию его координат на плоскости и в пространстве:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Теперь мы можем из (21) и (22) найти угол между векторами в зависимости от их координат на плоскости и в пространстве:

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \qquad (2$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \qquad (28)$$

В дальнейшем нам понадобится понятие *определителя второго порядка.* Для таблицы чисел (матрицы)

$$A$$

назовем ее *определителем* число $ad - bc,$ и будем его обозначать $|A|$.

Задачи и упражнения

Задача 1. Доказать теорему косинусов, используя понятие скалярного произведения.

Решение. Из треугольника ABC имеем: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ и $BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AB^2$.

Итак, $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}.$

Отсюда, по определению скалярного произведения,

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha, \tag{29}$$

где α - угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}.$

Задача 2. Проверить, является ли треугольник ABC, где $A(2,2),\ B(4,0),\ C(1,-3),$ прямоугольным.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AB}=(2,-2),\ \overrightarrow{BC}=(-3,-3),\ \overrightarrow{AC}=(-1,-5).$ Проверим поочередно гипотезы, состоящие в том, что один из углов треугольника - $\angle A,\ \angle B$ или $\angle C$ - прямой. Для угла $\angle A$ это дает равенство $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,$ соответственно для остальных углов – равенства $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=0.$

Поскольку действительно $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-6+6=0,$ то $\angle B$ - прямой и треугольник ABC - прямоугольный.

Задача 3. Доказать, что векторы $\vec{a}=(x_1,y_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0.$$

Решение. Обозначим определитель (30) через $D.$

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если один из векторов нулевой, то определитель (30) имеет нулевую строку и равен нулю. Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. Тогда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ при некотором λ, т.е. $x_1 = \lambda x_2,\ y_1 = \lambda y_2$ и $D = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \lambda x_2 y_2 - \lambda x_2 y_2 = 0.$

Обратно, если справедливо (30), то $x_1 y_2 = x_2 y_1$; обозначим эти равные произведения через p. Если $p = 0,$ то, перебирая возможные сочетания нулевых значений сомножителей, получаем следующие возможности: либо один из векторов или оба – нулевые, либо они имеют одновременно одну и ту же нулевую координату. Во всех этих случаях векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если же $p \neq 0,$ то все координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не равны нулю и $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2},$ т.е. соответствующие их координаты пропорциональны, и опять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Задача 4. Найти вектор высоты AH в треугольнике ABC, где $A(6,5),\ B(0,7),\ C(4,-1),$ используя параметрическое представление основания $BC.$

Решение. Поскольку векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AB}$ ортогональны, то $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$ Используя параметрическое представление точки $H = H_{BC}[\alpha]$ в отрезке BC, получаем $H = H(x, y),$ где $x = (1-\alpha)0 + \alpha 4 = 4\alpha,\quad y = (1-\alpha)7 + \alpha(-1) = -8\alpha + 7,\quad \overrightarrow{AH} = (4\alpha - 6, -8\alpha + 2)$ и $0 = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (4\alpha - 6)4 + (-8\alpha + 2)(-8) = 80\alpha - 40,$ т.е. $\alpha = \dfrac{1}{2}$ и $H(2,3).$ Поэтому вектор высоты $\overrightarrow{AH} = (-4, -2).$

Задача 5. Найти ортогональную проекцию заданного вектора на прямую, определяемую некоторым другим вектором.

Решение. Пусть $\vec{a}$ **-** проектируемый вектор, прямая задается вектором $\vec{b}$ и $\vec{a}'$ - искомая проекция (рис.9).

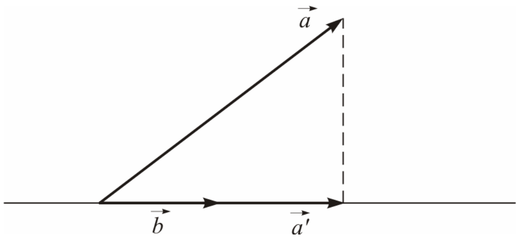


рис.9

Тогда векторы $\vec{a}'$ и $\vec{b}$ - коллинеарны, т.е.

$$\vec{a}' = \lambda\vec{b}$$

при некотором λ. Найдем величину λ из условия ортогональности проектирования. Действительно, вектор $\vec{a}$ представим в виде суммы $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{h}$, где $\vec{h} \perp \vec{b}$. Умножая скалярно обе части этого равенства на вектор $\vec{b}$, получаем $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}'\vec{b}$, откуда $\lambda = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2}$, и, окончательно,

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2}\vec{b}.$$

Задача 6. Выразить вектор высоты произвольного треугольника через векторы двух его сторон, имеющих с высотой общую вершину.

Решение. Пусть в треугольнике ABC проведена высота AD к стороне $\overrightarrow{BC}$ (рис.10).

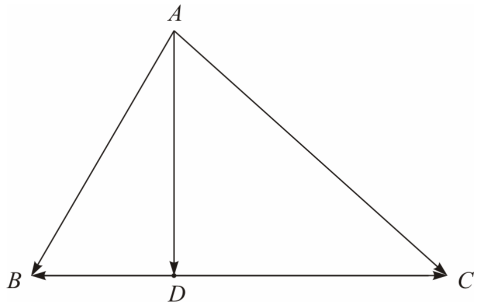


рис.10

Рассматривая треугольники ABD и $ACD,$ получаем

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB},\ \ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}.$$

Умножая обе части этих равенств на $\overrightarrow{BC}$, с учетом ортогональности векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ получаем:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BC},\ \ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны вектору $\overrightarrow{BC}$, то

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=-BD\cdot BC,\quad \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}=CD\cdot BC.$$

Отсюда

$$BD=-\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{BC},\quad CD=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{BC}.$$

Из параметрического представления точки D в отрезке BC имеем: $\overrightarrow{AD}=(1-\alpha)\overrightarrow{AB}+\alpha\overrightarrow{AC},$ где $\alpha=\dfrac{BD}{BC},\ \ 1-\alpha=\dfrac{CD}{BC,}$, т.е.

$$\overrightarrow{AD}=\frac{CD}{BC}\overrightarrow{AB}+\frac{BD}{BC}\overrightarrow{AC}.$$

Подставляя найденные выше выражения для BD и CD, получаем

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{BC^2}\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{BC^2}\overrightarrow{AC}. \quad (32$$

Используя теорему косинусов (29), в (32) можно оставить только векторы двух сторон треугольника:

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})}{BC^2}\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})}{BC^2}\overrightarrow{AC}=$$

$$=\frac{AC^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}+\frac{AB^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AC}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{AD}=\frac{AC^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}+\frac{AB^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AC}. \qquad (33)$$

Задача 7. Выразить вектор высоты произвольного треугольника через векторы его сторон, одна из которых - основание.

Решение. Можно просто подставить в (33) выражение вектора одной из сторон через вектор другой стороны и вектор основания, чтобы получить требуемое, но существует еще один способ вывода, с использованием результатов задачи 5.

Действительно, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB},$ где, в соответствии с (31), при $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{CB}$ получаем $\overrightarrow{DB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}}{BC^2}\overrightarrow{CB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{BC^2}\overrightarrow{BC}.$

Итак, окончательно,

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{BC^2}\overrightarrow{BC}.$$

Задача 8. Описать множество сумм двух лежащих на взаимно перпендикулярных прямых векторов, если сумма их длин постоянна.

Решение. Будем считать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на осях координат Ox и Oy соответственно (рис.11).

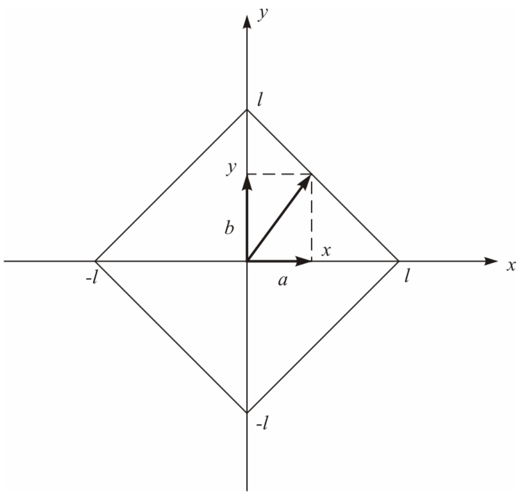


рис.11.

Пусть $|\vec{a}|+|\vec{b}|=l.$ Если $\vec{a}=(x,0),\ \vec{b}=(0,y),$ то $\vec{a}+\vec{b}=(x,y),$ где $|x|+|y|=l.$ Поэтому множество точек $M(x,y)$ описывает квадрат с вершинами $(0,\pm l),\ (\pm l,0).$

Задача 9. Доказать, что не существует вектора единичной длины, сумма которого с некоторым заданным вектором единичной длины была бы ненулевым вектором, ортогональным к исходному заданному вектору.

Решение. Пусть $\vec{a}=(a_1,a_2)$ - заданный вектор, $a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}=1$ и вектор $\vec{x}+\vec{a},$ где $\vec{x}=(x_1,x_2),\ x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=1,$ ортогонален вектору $\vec{a}.$ Тогда

$$(x_1+a_1)a_1+(x_2+a_2)a_2=0$$ (

и, с учетом того, что вектор $\vec{a}$ имеет единичную длину,

$$a_1x_1+a_2x_2=-1.$$

Выразим из этого равенства $a_2x_2=-a_1x_1-1$ и возведем его в квадрат: $a_2^{\ 2}(1-x_1^{\ 2})=a_1^{\ 2}x_1^{\ 2}+2a_1x_1+1$. Заменив $x_2^{\ 2}=1-x_1^{\ 2},\ 1-a_2^{\ 2}=a_1^{\ 2},$ с учетом $a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}=1$ получим $x_1^{\ 2}+2a_1x_1+a_1^{\ 2}=0.$

Итак, $(x_1+a_1)^2=0.$ Отсюда $x_1=-a_1$ и $x_2=\pm\sqrt{1-x_1^{\ 2}}=\pm\sqrt{1-a_1^{\ 2}}=\pm a_2.$

Если $x_2 = a_2$, то из условия (35) получаем $2a_2^{\,2} = 0$, т.е. $a_2 = 0$, и вектор $\vec{x} = (-a_1, 0)$ противоположен вектору $\vec{a} = (a_1, 0)$.

Если же $x_2 = -a_2$, то вектор $\vec{x} = (-a_1, -a_2)$ также противоположен вектору $\vec{a}$. Итак, в обоих случаях $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$.

Упражнения

1. Вытекает ли равенство векторов плоскости из

а) равенства проекций векторов на некоторую прямую;

б) равенства проекций векторов одинаковой длины на некоторую прямую;

в) равенства проекций векторов на две пересекающиеся прямые.

2. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую, определяемую вектором $\vec{a}$

а) $\vec{a} = (1,1),\ A(-2,-1),\ B(1,4)$; б) $\vec{a} = (1,3),\ A(-2,-4),\ B(2,1)$.

3. Среди следующих векторов указать коллинеарные

$$\vec{a}_1 = (-3,1),\ \vec{a}_2 = (6,-2),\ \vec{a}_3 = (1,-2),\ \vec{a}_4 = (2,-4),\ \vec{a}_5 = (-3,-6),\ \vec{a}_6 = (0,1).$$

4. Среди следующих векторов указать пары взаимно ортогональных

$$\vec{a}_1 = (2,1),\ \vec{a}_2 = (-2,-1),\ \vec{a}_3 = (-1,2),\ \vec{a}_4 = (1,2),\ \vec{a}_5 = (2,-1),\ \vec{a}_6 = (1,-2).$$

5. Проверить, является ли треугольник *ABC* прямоугольным

а) $A(-4,2),\ B(0,3),\ C(2,-5)$; б) $A(3,-2),\ B(1,4),\ C(6,2)$.

6. Доказать равенство $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$. Дать геометрическую интерпретацию этого равенства при $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

7. Выразить скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$ через длины векторов $|\vec{a}|,\ \ |\vec{b}|,\ \ |\vec{a}+\vec{b}|$.

8. Треугольник ABC правильный, с длиной стороны, равной a. Найти скалярные произведения его

а) векторов сторон; б) векторов медиан.

9. Найти длины векторов $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$

а) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}$; б) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ \vec{a}\vec{b}=-2.$

10. Найти точки-основания высот треугольника ABC

а) $A(-4,2),\ B(0,3),\ C(2,-5)$; б) $A(-5,1),\ B(1,6),\ C(4,-1)$.

11. Найти все векторы, ортогональные вектору $\vec{a}$

а) $\vec{a}=(-3,2)$; б) $\vec{a}=(2,1)$; в) $\vec{a}=(-1,1)$.

12. Найти все векторы, ортогональные плоскости векторов

$\vec{a}$ и $\vec{b}$

а) $\vec{a}=(-1,4,2),\ \vec{b}=(2,1,-1)$; б) $\vec{a}=(3,-1,-1),\ \vec{b}=(2,1,2)$.

13. Определить, лежит ли основание перпендикуляра из начала координат к прямой AB внутри отрезка AB

а) $A(3,-2),\ B(-4,1)$; б) $A(-3,-1),\ B(-5,1)$.

14. Проверить, является ли четырехугольник $ABCD$ прямоугольником

а) $A(2,3),\ B(-1,4),\ C(0,1),\ D(3,-2)$; б) $A(-1,0),\ B(0,2),\ C(4,0),\ D(3,-2)$.

15. Найти векторы высот треугольника ABC, где $A(-3,-5),\ B(1,1),\ C(3,-1)$, опущенных

а) из вершины A; б) из вершины B; в) из вершины C

16. Найти площадь треугольника ABC

а) $A(-7,1),\ B(-3,-4),\ C(1,3)$; б) $A(-5,-1),\ B(2,0),\ C(6,-8)$.

Тема 4. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Критерий компланарности трех векторов

Векторное произведение векторов

Пусть заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пространства и α - угол между ними. Их *векторным произведением* $\vec{a}\times\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha,$$

$$\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b},$$

тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ - правая. (3)

Утверждение 1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то, откладывая их от общей точки и проводя через конечные точки линии, параллельные векторам, получаем параллелограмм с площадью (1).

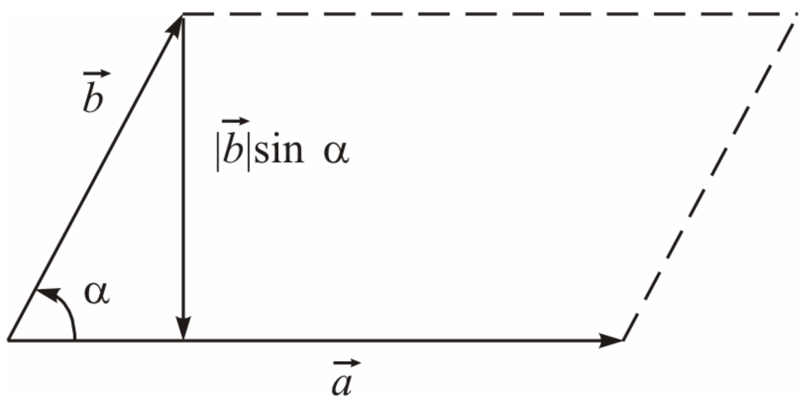


рис.1

Утверждение 2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются коллинеарными, то длина их векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Найдем произведения единичных направляющих векторов координатных осей:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{e}_1\times\vec{e}_1=\vec{0}, & \vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3, & \vec{e}_1\times\vec{e}_3=-\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2\times\vec{e}_1=-\vec{e}_3, & \vec{e}_2\times\vec{e}_2=\vec{0}, & \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1, \\ \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2, & \vec{e}_3\times\vec{e}_2=-\vec{e}_1, & \vec{e}_3\times\vec{e}_3=\vec{0}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Операция векторного произведения имеет следующие свойства:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},$$

$$\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right),$$

$$\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{b}\right),$$

$$\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\times\vec{c}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b}\times\vec{c}\right), \tag{9}$$

$$\vec{c}\times\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\beta\left(\vec{c}\times\vec{b}\right). \tag{10}$$

Свойство (5) называется *антикоммутативностью*, свойство (6) – *ассоциативностью*, свойства (7),(8) – *дистрибутивностью*. Свойства (9),(10) объединяют свойства (6),(7) и (6),(8) соответственно.

Векторное произведение дает нам первый пример операции, не обладающей свойством ассоциативности. Действительно, например

$$(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \times \vec{e}_3 = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = -\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_2 \times (\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) = (\vec{e}_2 \times \vec{0}) = \vec{0}.$$

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ с единичными направляющими векторами осей координат векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ имеют координаты $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Подставляя вместо $\vec{a},\ \vec{b}$ их разложения по направляющим векторам, и учитывая свойства (4)-(10), получаем координаты их векторного произведения

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (y_1 z_2 - y_2 z_1,\ z_1 x_2 - z_2 x_1,\ x_1 y_2 - x_2 y_1). \qquad (11)$$

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$A_{yz} = \begin{bmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{bmatrix},\ A_{zx} = \begin{bmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{bmatrix},\ A_{xy} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

то координаты векторного произведения получаются по единому правилу на основе вычисления соответствующих определителей:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (|A_{yz}|, |A_{zx}|, |A_{xy}|). \qquad (13$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ называется величина $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$. Смысл названия этой операции понятен, т.к. сначала берется векторное произведение двух первых векторов, которое затем скалярно умножается на третий вектор.

Отложим векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ от одной и той же точки:

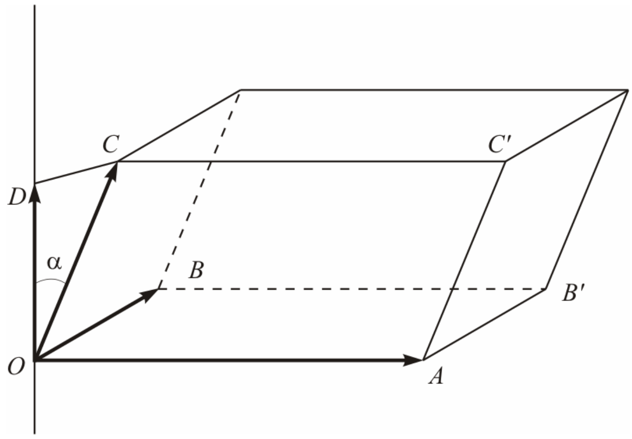


рис.2

Используя утверждение 2 и определение скалярного произведения, получаем

Утверждение 3. Если векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ не являются компланарными, то смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на векторах, со знаком плюс или минус, в зависимости от того, является ли тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ правой или левой.

Следствие 1. Векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Следствие 2. Смешанное произведение не зависит от порядка вычисления векторного и скалярного произведений в тройках векторов:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$$

Это утверждение позволяет упростить обозначение смешанного произведения и вместо $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ писать $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \qquad (1$$

При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a}. \quad (16)$$

Если в прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ с единичными направляющими векторами осей координат векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеют координаты

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),\ \vec{c} = (x_3, y_3, z_3),$$

то, умножая вектор (11) на вектор $\vec{c}$, получаем

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2) - (x_3y_2z_1 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3).$$

(17)

Если ввести в рассмотрение матрицу (таблицу) третьего порядка

$$A = \left[\begin{matrix} x_1 & y \\ x_2 & y \\ x_3 & y \end{matrix}\right.$$

и назвать ее *определителем* (обозначение: $|A|$) число в правой части равенства (17):

$$|A| = (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2) - (x_3y_2z_1 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3), \quad (18)$$

то величина векторного произведения равна определителю матрицы координат этих векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем критерий компланарности векторов в терминах их координат.

Для вычисления определителя можно использовать так называемое «правило треугольников». Оно заключается в том, что, если обозначить элементы матрицы A точками, то в выражении (18) первая скобка состоит из трех слагаемых, первое их которых – произведение элементов *главной* диагонали матрицы, соединяющей левый верхний угол матриц с правым нижним,

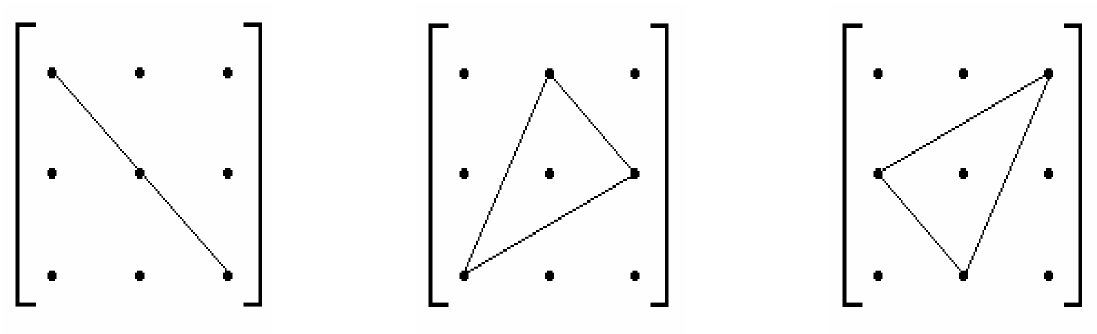


рис.3

а два остальных – произведения элементов, стоящих в вершинах равнобедренных треугольников, одна из сторон которых параллельна главной диагонали матрицы.

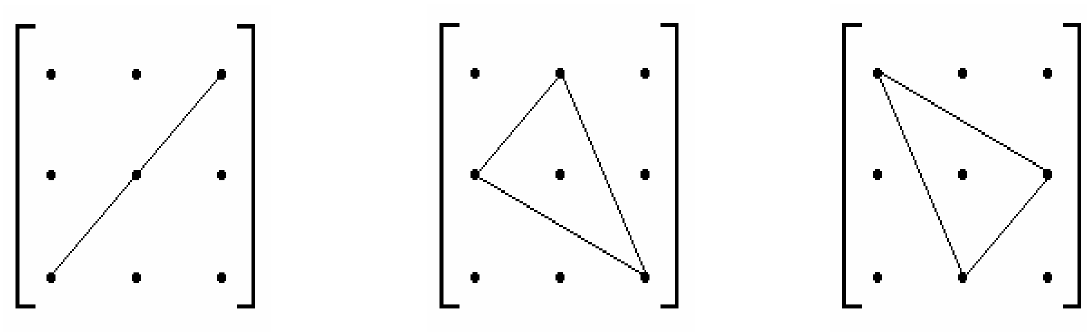


рис.4

Для второй скобки – ситуация симметричная, только вместо главной диагонали необходимо рассматривать *побочную* (соединяющую правый верхний угол матрицы с левым нижним).

Утверждение 4.

Три вектора $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель матрицы их координат равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Задачи и упражнения

Задача 1. Найти вектор, ортогональный плоскости треугольника ABC, где $A(-1,4,1)$, $B(2,1,-1)$, $C(-6,-2,-4)$.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AB}=(3,-3,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-5,-6,-5)$. Обозначая $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, получаем его координаты

$$|A_{yz}|=\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}=3,\ |A_{zx}|=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}=25,\ |A_{xy}|=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}=-33.$$

Итак, вектор $\vec{a}=(3,25,-33)$ ортогонален плоскости треугольника ABC.

Задача 2. Доказать, что площадь треугольника ABC с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ равна

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|D|,\quad D=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Решение. Дополним систему координат плоскости до пространственной правой прямоугольной системы координат, направив ось Oz вверх перпендикулярно плоскости Oxy.

В этой системе координат вершины треугольника получают третью (нулевую) координату: $A(x_1,y_1,0)$, $B(x_2,y_2,0)$, $C(x_3,y_3,0)$, и площадь треугольника, согласно утверждению 2, равна половине длины вектора $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},$ где

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ 0).$

Поскольку $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,\ 0,\ D)$ и длина этого вектора равна абсолютной величине $|D|$ ненулевой координаты, искомая площадь равна величине (21).

Если одна из вершин треугольника (например, C) совпадает с началом координат, получаем задачу нахождения площади треугольника, образованного векторами $\vec{a}=(x_1,y_1)=\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}=(x_2,y_2)=\overrightarrow{OB}$. Полагая $x_3=y_3=0,$ получаем

$$D=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ -x_1 & -y_1 \end{vmatrix}=-(x_2-x_1)y_1+x_1(y_2-y_1)=(x_1y_2-x_2y_1)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Итак, площадь треугольника OAB равна

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|D|,\qquad D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \qquad (2$$

Задача 3. Ориентация треугольника ABC называется *положительной* или *отрицательной*, в зависимости от того, положительным или отрицательным является направление обхода точек $A,\ B,\ C.$

Доказать, что треугольник ABC имеет положительную ориентацию тогда и только тогда, когда

$$D=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}>0. \qquad (2$$

Решение. При решении предыдущей задачи мы получили, что, если дополнить систему координат плоскости до правой декартовой прямоугольной системы координат пространства, то векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=D\cdot\vec{e}_3,$ где $\vec{e}_3-$единичный направляющий вектор оси Oz. Очевидно, ориентация треугольника ABC - положительная тогда и только тогда, когда тройка векторов $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \vec{e}_3$ - правая. Поскольку тройка векторов $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ D\cdot\vec{e}_3$, по определению векторного произведения, всегда правая, то ориентация треугольника ABC - правая тогда и только тогда, когда $D>0.$

Задача 4. Доказать, что ориентация треугольников $O'AB,\ O'BC,\ O'CA$ совпадает с ориентацией треугольника ABC тогда и только тогда, когда точка O' лежит внутри треугольника ABC.

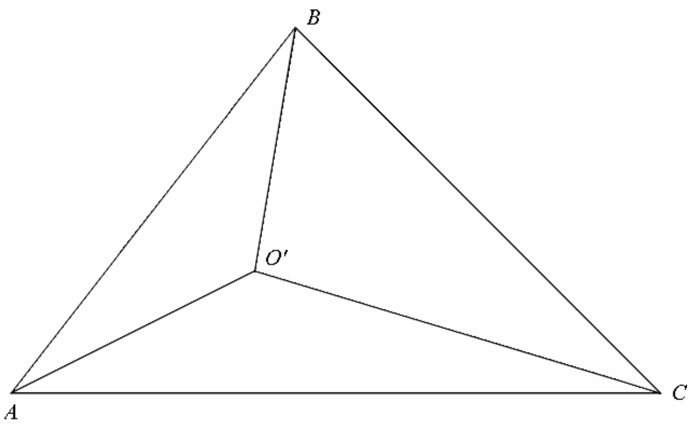


рис.3.

Решение. Действительно, ориентации треугольников ABO' и $ABC,\ BCO'$ и BCA, CAO' и CAB совпадают тогда и только тогда, когда точки O' и C, O' и A, O' и B находятся по одну сторону от прямых $AB,\ BC,\ CA$ соответственно, а ориентации треугольников $ABC,\ BCA,\ CAB$ совпадают.

Задача 5. Доказать для площади треугольника с вершинами $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$ равенство

$$S = \frac{1}{2} | D_1 + D_2 + D_3 |,$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \qquad (25)$$

причем знак его ориентации совпадает со знаком выражения $D_1 + D_2 + D_3$.

Решение. Как и при решении задачи 2, дополним систему координат плоскости до пространственной правой прямоугольной системы координат, направив ось Oz вверх перпендикулярно плоскости Oxy. Тогда

$D \cdot \vec{e}_3 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} =$
$= (D_1 + D_2 + D_3)\vec{e}_3.$ Поэтому $D = D_1 + D_2 + D_3,$ и из (21) получаем

$$S = \frac{1}{2} | D |.$$

Задача 6. Выразить вектор высоты треугольника через векторы его сторон.

Решение. Покажем, что вектор

$$\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{BC} \times (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC})}{BC^2} = \frac{(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}) \times \overrightarrow{BC}}{BC^2} \qquad (26)$$

является искомым. Действительно, вектор $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC}$ ортогонален плоскости треугольника ABC, поэтому вектор $\overrightarrow{BC} \times (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC})$

лежит в плоскости треугольника ABC и ортогонален вектору $\overrightarrow{BC}$, т.е. направлен по высоте AH.

Более того, и длина вектора (26) равна высоте, т.к. из $AC\cdot\sin\alpha = AH$ получаем

$$\left|\overrightarrow{BC}\times(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC})\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right| = BC^2\cdot AC\cdot\sin\alpha = BC^2\cdot AH.$$

Задача 7. Доказать, что вершины параллелограмма наибольшей площади, две вершины которого – проекции третьей, лежащей на одной из сторон треугольника, вдоль двух других его сторон, делят стороны треугольника пополам.

Решение. Пусть вершины треугольника имеют координаты $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (рис.4). Воспользуемся векторной формой (равенство (23) темы 2) параметрического представления точек M, M_1, M_2 в соответствующих отрезках-сторонах параллелограмма:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}, \\ \overrightarrow{OM_1} = (1-\alpha_1)\overrightarrow{OB} + \alpha_1\overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{OM_2} = (1-\alpha_2)\overrightarrow{OA} + \alpha_2\overrightarrow{OC}. \end{cases} \tag{27}$$

Поскольку M_1CM_2M - параллелограмм, то $\overrightarrow{M_1C} = \overrightarrow{MM_2}$, т.е. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}$.

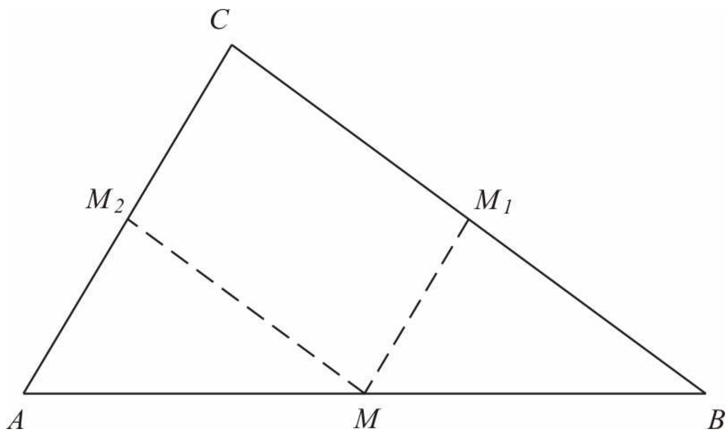


рис.4

Подставляя в это равенство выражения (27), получаем

$$(1-\alpha_1)(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) = \left(\alpha-\alpha_2\right)\overrightarrow{OA}+\alpha_2\overrightarrow{OC}-\alpha\overrightarrow{OB}.$$

Собирая коэффициенты при одинаковых векторах, получаем

$$p\,\overrightarrow{OA}+q\,\overrightarrow{OB}+r\,\overrightarrow{OC}=\vec{0}, \quad ($$

где $p=\alpha-\alpha_2,\ q=1-\alpha_1-\alpha,\ r=\alpha_2+\alpha_1-1$ и $p+q+r=0.$ Если хоть один из коэффициентов $p,\ q,\ r$ не равен нулю, то, согласно утверждению 1 темы 2, векторы $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарны, т.е. точки $A,\ B,\ C$ лежат на одной прямой, что невозможно. Отсюда $p=q=r=0,$ т.е. $\alpha_2=\alpha,\ \alpha_1=1-\alpha.$

Найдем теперь векторы $\overrightarrow{MM_1}$ и $\overrightarrow{MM_2}.$ Имеем:

$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=(1-\alpha)(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=(1-\alpha)\overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}=\alpha(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\alpha\overrightarrow{BC}.$$

Площадь S параллелограмма M_1CM_2M равна длине векторного произведения этих векторов. Поскольку $\alpha\in[0,1],$ то $S=\alpha(1-\alpha)\ \left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right|.$ Поэтому наибольшей величины площадь параллелограмма достигает при максимальном значении произведения $\alpha(1-\alpha).$

Согласно решению задачи 7 темы 1, это произведение достигает максимума при $\alpha = \frac{1}{2}$.

В силу (27), это означает, что точки M, M_1, M_2 являются серединами соответствующих сторон.

Упражнения

1. Что можно сказать о координатах векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в координатной плоскости

а) Oxy; б) Oyz; в) Ozx.

2. Вытекает ли из равенства $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$ при некотором $\vec{c} \neq 0$ равенство векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$?

3. Проверить равенства $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$ и выяснить их геометрический смысл.

4. Найти координаты векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

а) $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$; б) $\vec{a} = (-3, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 4, -2)$;

в) $\vec{a} = (-4,\ 2,\ 1)$, $\vec{b} = (3,\ -1,\ 2)$.

5. Найти площадь параллелограмма, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

а) $\vec{a} = (1,\ 3)$, $\vec{b} = (3,\ 1)$; б) $\vec{a} = (-1,\ 2)$, $\vec{b} = (2,\ 0)$.

6. Как связаны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

7. Доказать, что для трех произвольных точек A, B, C справедливо $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}$.

8. Заданы два взаимно ортогональных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти вектор $\vec{x}$, для которого $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$

а) $\vec{a}=(2,1,-3),\ \vec{b}=(1,1,1)$; б) $\vec{a}=(-4,2,1),\ \vec{b}=(1,1,2)$.

9. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$, где

а) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

10. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$

а) $\vec{a}=(1,3,-1),\ \vec{b}=(-1,4,2),\ \vec{c}=(3,2,-4)$;

б) $\vec{a}=(-4,2,0),\ \vec{b}=(2,-1,3),\ \vec{c}=(3,0,-1)$.

11. Найти вектор $\vec{c}$ единичной длины, если известно, что векторы единичной длины $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны и

а) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=1$, б) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-1$.

12.Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичной длины ортогональны. Найти векторы

а) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$; б) $\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{b})$.

13. Найти смешанное произведение векторов-ребер правильного тетраэдра со стороной a.

14. Доказать, что векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c}$ и $\vec{c}\times\vec{a}$ коллинеарны.

Тема 5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две заданных точки. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой. Параметрическое уравнение прямой. Уравнение прямой общего вида

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на декартовой плоскости задана прямая l, не параллельная осям координат. Обозначим через α угол, который образует прямая с положительным направлением оси абсцисс. Более точно, будем считать этот угол *положительным*, если поворот оси абсцисс вокруг точки ее пересечения с прямой l до совмещения с прямой кратчайшим путем происходит в положительном направлении, и *отрицательным* – в противном случае.

Далее, пусть задана точка пересечения $B = B(0, b)$ прямой с осью ординат.

Очевидно, два параметра α и b однозначно определяют положение прямой на плоскости.

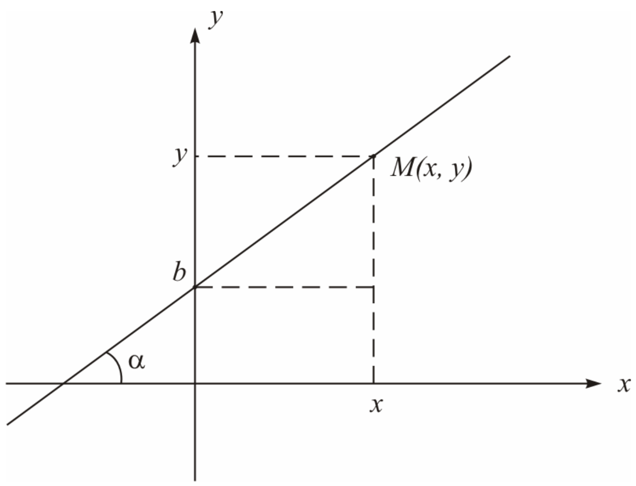


рис. 1.

Из рис.1 нетрудно получить соотношение между координатами x и y произвольной точки прямой, т.е. *уравнение* прямой:

$$y = kx + b \qquad (1)$$

Коэффициент $k = \mathrm{tg}\,\alpha$ называется *угловым коэффициентом* прямой, а само уравнение называется *уравнением с угловым коэффициентом.*

Если прямая параллельна оси ординат, то ее уравнение $x = x_0$ не может быть задано в виде (1). Таким образом, уравнение прямой с угловым коэффициентом *не является универсальным* – прямые, параллельные оси Oy не могут быть заданы этим уравнением.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

Пусть заданы точка $M_1(x_1, y_1)$, лежащая на прямой, и угол α с осью абсцисс (т.е. задан угловой коэффициент $k = \mathrm{tg}\,\alpha$). Посмотрим, как изменится уравнение (1) при замене точки B на оси ординат произвольной точкой прямой.

Поскольку точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на прямой, то справедливо равенство

$$y_1 = kx_1 + b. \qquad (2)$$

Вычитая это равенство из равенства (1), получим

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (3)$$

Это и есть искомое уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть известно, что две различных точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат на прямой, не параллельной осям координат.

Как и выше, получаем равенства (2) и (3). Поскольку точка $M_2(x_2, y_2)$ лежит на прямой, ее координаты, будучи подставленными в уравнение (3), дадут верное равенство

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Отсюда находим угловой коэффициент

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Поскольку прямая не параллельна оси ординат, то $x_1 \neq x_2$ и знаменатель в (4) отличен от нуля.

Подставляя выражение (4) в уравнение (3), получаем

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{5}$$

Это и есть искомое уравнение. Придадим ему более симметричную форму, разделив левую и правую часть на $y_2 - y_1$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{6}$$

Поскольку прямая не параллельна оси абсцисс, то $y_1 \neq y_2$ и знаменатель слева также отличен от нуля.

Уравнение прямой в отрезках

Данный вид уравнения является частным видом предыдущего уравнения, когда заданные точки лежат на осях координат. Будем предполагать, что эти точки различны, т.е. прямая не проходит через начало координат.

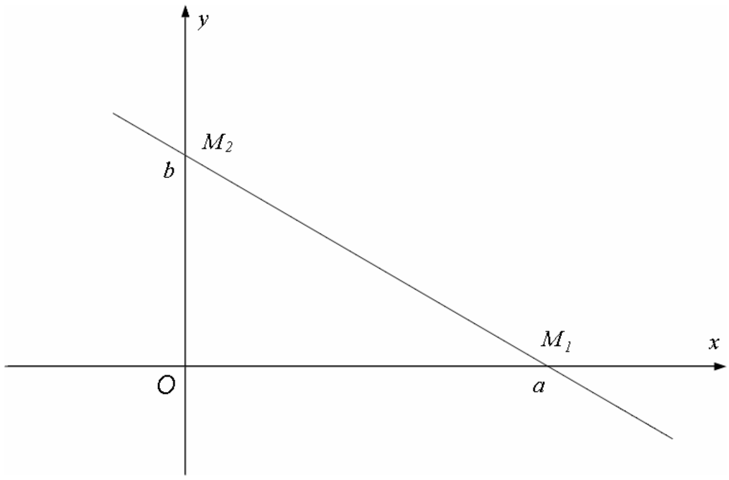


рис.2

Пусть $M_1(a,0),\ M_2(0,b),\ (a \neq 0,\ b \neq 0)$ - точки пересечения прямой с осями координат. Подставляя их координаты в соотношения (6), получаем *уравнение в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{7}$$

Своим названием данный вид уравнения обязан тому факту, что величины $|a|$ и $|b|$ равны отрезкам OM_1 и OM_2, отсекаемым прямой на осях координат.

Параметрическое уравнение прямой

Пусть в общей декартовой системе координат задана прямая l. Любой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$, коллинеарный прямой, назовем *направляющим вектором* этой прямой.

Если $M_0(x_0, y_0)$ - некоторая точка прямой l, то для любой точки $M(x,y)$ прямой l вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, что означает $\overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{a}$, т.е.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\,\vec{a}, \tag{8}$$

где t - некоторое действительное число.

Это соотношение, расписанное покоординатно, дает *параметрическое* уравнение прямой:

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t \quad (-\infty < t < +\infty). \qquad (9)$$

Когда параметр t меняется от $-\infty$ до $+\infty$, тогда движется по прямой в направлении вектора $\vec{a}$.

Каноническое уравнение прямой

Если все координаты вектора $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ненулевые, то соотношения (9) можно записать в виде равенства

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}, \qquad (10)$$

которое называются *каноническим* уравнением прямой.

Нормальное уравнение прямой

Пусть задана произвольная прямая на декартовой плоскости, не проходящая через начало координат. Опустим перпендикуляр OP на прямую из начала координат, пусть его длина равна p. Обозначим угол, который он образует с положительным направлением оси абсцисс, через α. (рис.3).

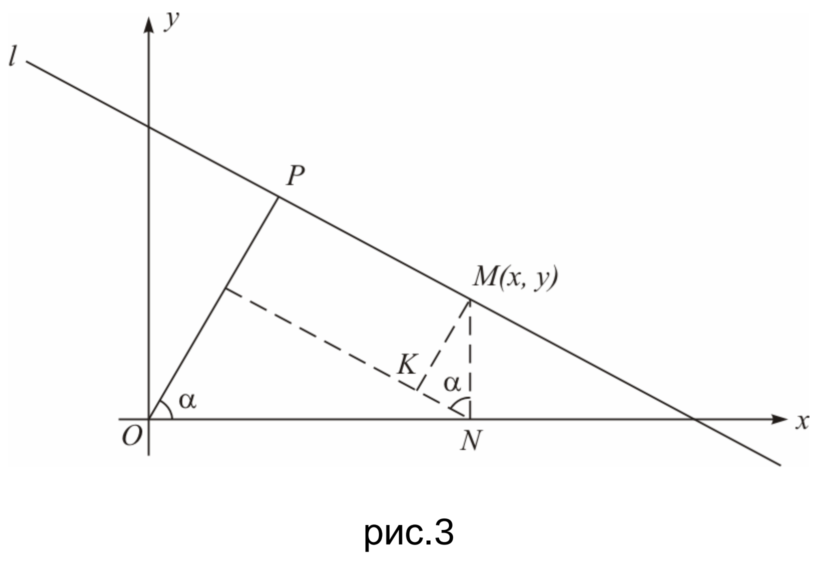


рис.3

Возьмем произвольную точку $M(x, y)$ на прямой. Рассматривая дополнительные построения на рис.3, нетрудно получить соотношение

$$x\sin\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (11)$$

между координатами этой точки, называемое *нормальным уравнением* прямой, поскольку задание этой прямой происходит с помощью перпендикуляра (иногда называемого еще *нормалью)* к прямой.

Коэффициенты $a = \sin\alpha,\ b = y\sin\alpha$, p нормального уравнения имеют определенные особенности. Действительно, сумма квадратов коэффициентов при переменных равна единице:

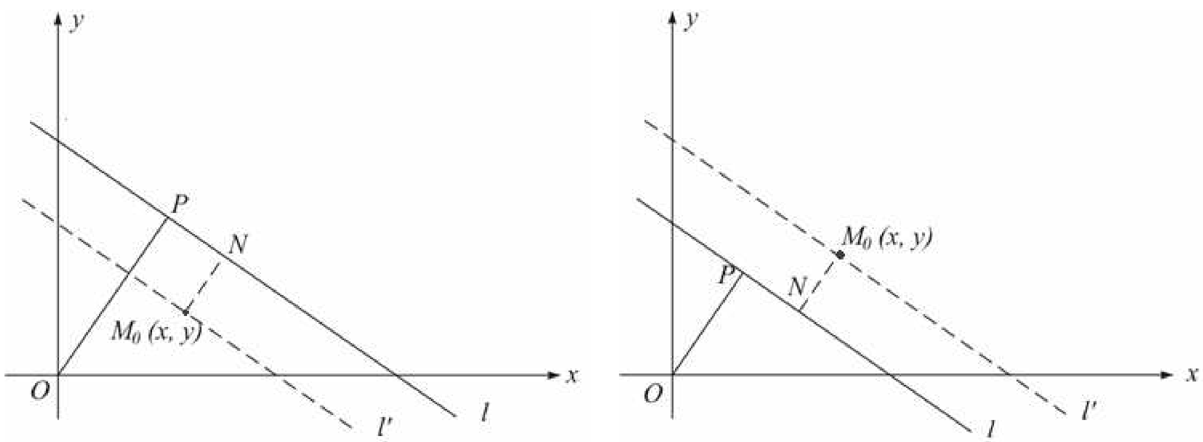
$$a^2 + b^2 = 1, \qquad (12)$$

и правая часть p строго положительна.

Замечание. Для прямой, проходящей через начало координат, будем называть *нормальным* уравнение, удовлетворяющее лишь условию (12). Такая прямая имеет пару нормальных уравнений, отличающихся знаком левой части.

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая l (рис. 4) своим нормальным уравнением и точка $M_0(x_0, y_0)$ на декартовой плоскости.



а) б)

рис. 4

Возьмем произвольную точку плоскости, не лежащую на прямой. Рассматривая отдельно случаи, когда точка M_0 лежит выше прямой (рис.4а) и ниже прямой (рис 4б), с использованием указанных на рисунках дополнительных построений, нетрудно получить величину расстояния от этой точки до прямой:

$$\rho(M_0, l) = | x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p |. \qquad (13)$$

Таким образом, для вычисления расстояния от точки до прямой необходимо:

1) перейти к нормальному уравнению прямой,
2) подставить в разность левой и правой частей уравнения координаты точки,
3) отбросить знак минус, если он имеется.

В связи с этим необходимо уметь переходить от произвольного уравнения прямой к нормальному. Мы покажем далее, как это делается для уравнения прямой общего вида.

Уравнение прямой общего вида

Мы получили несколько различных видов уравнений прямой, каждый из них имеет свои особенности, но общей чертой является то обстоятельство, что это уравнение первой степени (линейное) относительно переменных.

В таком случае возникает вопрос, всякое ли уравнение первой степени

$$a\,x + b\,y = c \qquad (14)$$

задает прямую на декартовой плоскости.

Ответ на этот вопрос дает следующее

Утверждение 1. Всякое уравнение первой степени в декартовой системе координат является уравнением прямой. Всякая прямая на плоскости может быть задана в декартовой системе координат уравнением первой степени.

Заметим, что уравнение общего вида лишено некоторых «недостатков» изученных выше типов уравнений прямой. Так, оно симметрично относительно обеих переменных, и, согласно утверждению 1, универсально, т.е. задает все виды прямых на плоскости.

Отметим некоторые его частные случаи.

1) $c = 0$. Прямая проходит через начало координат:

$$a\,x + b\,y = 0. \tag{15}$$

2) $a = 0$. Прямая параллельна оси абсцисс:

$$y = \frac{c}{b}. \tag{16}$$

3) $b = 0$. Прямая параллельна оси ординат:

$$x = \frac{c}{a}. \tag{17}$$

Приведение уравнения прямой общего вида к нормальному уравнению

Пусть задано уравнение прямой

$$a\,x + b\,y = c\,. \tag{18}$$

Если его коэффициенты удовлетворяют равенству (12), то либо это уравнение уже является нормальным, либо становится нормальным после смены знаков у его левой и правой частей на противоположные.

Пусть теперь равенство (12) не выполняется. Умножим правую и левую части уравнения (18) на некоторый нормирующий множитель $\mu \neq 0$ и потребуем, чтобы уравнение в результате превратилось в нормальное:

$$(\mu a)\, x + (\mu b)\, y = \mu c. \tag{19}$$

Из условия (12) для коэффициентов этого уравнения получаем:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{20}$$

Знак множителя μ выбирается из условия

$$\mu c = p > 0, \tag{21}$$

т.е. знаки множителя μ и правой части c должны совпадать.

Используя полученные выше результаты, можно записать соотношение для расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной уравнением общего вида:

$$\rho(M_0, l) = \frac{|\, a\, x_0 + b\, y_0 - c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{22}$$

Задачи и упражнения

Задача 1. Написать уравнение прямой, перпендикулярной отрезку AB, где $A(2, -6)$, $B(-1, 6)$, и проходящей через его середину.

Решение. Воспользуемся тем, что вектор $\overrightarrow{AB}$ ортогонален прямой, и, следовательно, его можно выбрать в качестве вектора нормали к прямой в уравнении прямой общего вида. Находя $\overrightarrow{AB} = (-3, 12)$, получаем тем самым линейную часть уравнения прямой: $-3x + 12y = c$, а правую часть c находим из условия принадлежности середины отрезка $C\left(\frac{1}{2},0\right)$ прямой: $c=-\frac{3}{2}.$

Итак, окончательно, уравнение прямой имеет вид $-3x+12y=-\frac{3}{2}$ или $2x-8y=1.$

Задача 2. Найти площадь треугольника ABC, где $A(-1,0),\ B(4,2),\ C(1,-2).$

Решение. Найдем одну из высот треугольника, например, AH, как расстояние от вершины A до прямой BC. Уравнение прямой BC имеет вид $\frac{x-4}{-3}=\frac{y-2}{-4}$, или, переходя к уравнению общего вида, $4x-3y=10.$ Отсюда искомое расстояние равно $AH=\frac{|4(-1)-10|}{5}=\frac{14}{5}.$ Далее, поскольку $BC=5,$ площадь равна $S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{14}{5}=7.$

Задача 3. Вывести уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$, в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (23)$$

Решение. Если $M(x,y)$ - произвольная точка прямой, то векторы $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,\ y-y_1)$ и $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ коллинеарны, следовательно, согласно свойству (30) темы 3, справедливо (23).

Задача 4. Найти проекцию точки $A(x_0,y_0)$ на прямую $ax+by=c.$

Решение. Пусть $A'(x, y)$ - искомая проекция. Тогда вектор $\overrightarrow{AA'} = (x - x_0,\ y - y_0)$ коллинеарен вектору нормали $\vec{n} = (a, b)$ к прямой l т.е. $AA' = t\vec{n}$ и

$$x = x_0 + t\,a,\ \ y = y_0 + t\,b.$$

Так как точка A' лежит на прямой l, то, подставляя эти значения в уравнение прямой, получаем верное равенство:

$$c = a\,x + b\,y = a(x_0 + t\,a) + b(y_0 + t\,b) = ax_0 + b\,y_0 + t\,(a^2 + b^2).$$

Отсюда $t = \dfrac{c - (ax_0 + b\,y_0)}{a^2 + b^2}$, и, окончательно, получаем координаты проекции:

$$x = x_0 + \frac{a\,(c - ax_0 - by_0)}{a^2 + b^2}, \quad y = y_0 + \frac{b\,(c - ax_0 - by_0)}{a^2 + b^2}. \qquad (24)$$

Задача 5. Найти точку, симметричную точке $A(x_0, y_0)$ относительно прямой $a\,x + b\,y = c.$

Решение. Пусть $B(x, y)$ - искомая точка**.** Очевидно, $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AA'},$ где A' - проекция точки A на прямую l, координаты которой найдены в (24). Отсюда

$$x = x_0 + \frac{2a\,(c - ax_0 - by_0)}{a^2 + b^2}, \quad y = y_0 + \frac{2b\,(c - ax_0 - by_0)}{a^2 + b^2}. \qquad (25)$$

Задача 6. Доказать, что угловые коэффициенты прямых, симметричных относительно биссектрисы первого и третьего (второго и четвертого) координатных углов, взаимно обратны.

Решение. Очевидно, можно считать, что прямые проходят через начало координат. Если точка $M(x, y)$ лежит на одной из прямых, то симметричная ей точка $M'(x', y')$ имеет координаты $x' = y, \quad y' = x,$ (соответственно $x' = -y, \; y' = -x$ для симметрии относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов), поэтому $k_1 = \dfrac{y}{x}$ и $k_2 = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{x}{y}$. Отсюда

$$k_1 k_2 = 1. \tag{26}$$

Задача 7. Написать уравнение биссектрисы угла между единичными векторами $\vec{a}, \; \vec{b}.$

Решение. Очевидно, вектор $\vec{a} + \vec{b}$ направлен по биссектрисе. Расписывая покоординатно параметрическое векторное уравнение этой прямой $\overrightarrow{OM} = t(\vec{a} + \vec{b}),$ получаем $x = t\,(a_1 + b_1), \quad y = t\,(a_2 + b_2).$ Отсюда $\dfrac{x}{a_1 + b_1} = \dfrac{y}{a_2 + b_2}$ или

$$y = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} x. \tag{27}$$

Задача 8. Найти угловой коэффициент биссектрисы угла между пересекающимися прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2.

Решение. Будем предполагать, что прямые не симметричны относительно оси Oy (т.е. $k_1 + k_2 \neq 0$), т.к. в противном случае биссектрисой является ось Oy, которая не имеет уравнения с угловым коэффициентом.

Обозначим угловой коэффициент биссектрисы через k. Углы, которые образует биссектриса с каждой из прямых, равны $\frac{\varphi}{2}$, где φ - угол между прямыми (рис.5).

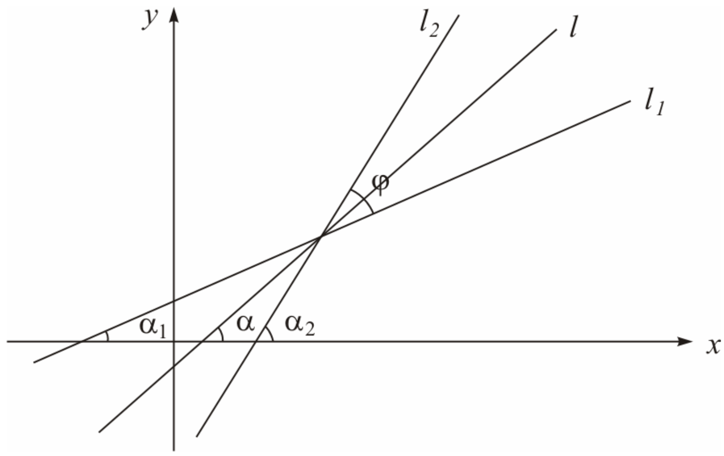


рис.5

Рассмотрим отдельно случай, когда прямые l_1 и l_2 перпендикулярны. Условие $k_1+k_2\neq 0$ в этом случае означает, что $-1=k_1k_2\neq -k_1^2$, $-1=k_1k_2\neq -k_2^2$, т.е. $k_1\neq\pm 1$, $k_2\neq\pm 1$. Поскольку $\varphi=\alpha_2-\alpha_1=\frac{\pi}{2}$, то

$$k=\mathrm{tg}\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\right)=\mathrm{tg}\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+k_1}{1-k_1}.$$

Подставляя в это выражение $k_1=\frac{1}{k_2}$, получаем также $k=\frac{k_2-1}{k_2+1}$.

Итак, в случае перпендикулярных прямых

$$k==\frac{1+k_1}{1-k_1}=\frac{k_2-1}{k_2+1}. \tag{28}$$

Пусть теперь прямые l_1 и l_2 не перпендикулярны. Поскольку углы между биссектрисой и каждой из прямых l_1 и l_2 равны $\frac{\varphi}{2}$, получаем $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{k_1-k}{1+k_1k}=\frac{k-k_2}{1+k_2k}$. Отсюда имеем уравнение относительно k:

$$\frac{k_1-k}{1+k_1k}=\frac{k-k_2}{1+k_2k}.$$

Преобразуя это уравнение, получаем квадратное уравнение

$$(k_1+k_2)k^2+2(1-k_1k_2)k-(k_1+k_2)=0 \qquad (29)$$

или, после деления на $k_1+k_2\neq 0$,

$$k^2+2\frac{1-k_1k_2}{k_1+k_2}k-1=0. \qquad (30)$$

Дискриминант уравнения (30) всегда положителен:

$$D=4\left(\frac{1-k_1k_2}{k_1+k_2}\right)^2+4=4\frac{(1-k_1k_2)^2+(k_1+k_2)^2}{(k_1+k_2)^2},$$

и уравнение имеет два корня, которые соответствуют взаимно перпендикулярным биссектрисам двух смежных углов между прямыми. Их угловые коэффициенты имеют противоположные знаки (это видно, в силу теоремы Виета, и из уравнения (30)). Найдем, например, положительное решение:

$$k=\frac{k_1k_2-1+\sqrt{(k_1k_2-1)^2+(k_1+k_2)^2}}{k_1+k_2}=\frac{k_1k_2-1+\sqrt{(1+k_1)^2(1+k_2)^2}}{k_1+k_2}. \qquad (31)$$

Это выражение можно преобразовать к несколько иному виду, но лучше получим его, продемонстрировав еще один способ решения задачи.

Обозначим через t выражение для тангенса угла между прямыми: $t=\operatorname{tg}\varphi$. Поскольку $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$, то, обозначая

$x = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$, получаем связь между этими двумя вспомогательными величинами в виде квадратного уравнения

$$t\,x^2 + 2x - t = 0. \tag{32}$$

Здесь $t \neq 0,$ т.к. в противном случае прямые были бы параллельны. Хотя это уравнение имеет два различных корня в силу положительности дискриминанта $D = 4(1+t^2)$ этого уравнения, но $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $x = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} > 0$, и необходимо выбрать лишь положительное решение:

$$x = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t}. \tag{33}$$

Подставляя вместо t его выражение через угловые коэффициенты: $t = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k}$, и проводя простейшие преобразования, получаем

$$\sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\frac{(k_1-k_2)^2}{(1+k_1k_2)^2}} = \sqrt{\frac{(1+k_1k_2)^2+(k_1-k_2)^2}{1+k_1k_2}} = \sqrt{\frac{(1+k_1^{\;2})(1+k_2^{\;2})}{1+k_1k_2}};$$

$$x = \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t} = \frac{\sqrt{(1+k_1^{\;2})(1+k_2^{\;2})}-k_1k_2-1}{k_1-k_2};$$

Отсюда $k = \operatorname{tg}\left(\alpha_1+\dfrac{\varphi_2}{2}\right) = \dfrac{k_1-x}{1+k_1x} = \dfrac{1+k_1^{\;2}-\sqrt{(1+k_1^{\;2})(1+k_2^{\;2})}}{k_1\sqrt{(1+k_1^{\;2})(1+k_2^{\;2})}-k_2(1+k_1^{\;2})} =$

$$= \frac{\sqrt{1+k_1^{\;2}}\left(\sqrt{1+k_1^{\;2}}-\sqrt{1+k_2^{\;2}}\right)}{\sqrt{(1+k_1^{\;2})}\left(k_1\sqrt{1+k_2^{\;2}}-k_2\sqrt{1+k_1^{\;2}}\right)} = \frac{\sqrt{1+k_1^{\;2}}-\sqrt{1+k_2^{\;2}}}{k_1\sqrt{1+k_2^{\;2}}-k_2\sqrt{1+k_1^{\;2}}}.$$

Итак,

$$k = \frac{\sqrt{1+k_1^{\;2}}-\sqrt{1+k_2^{\;2}}}{k_1\sqrt{1+k_2^{\;2}}-k_2\sqrt{1+k_1^{\;2}}}. \tag{34}$$

Задача 9. Доказать, что расстояние между параллельными прямыми $l_1 : a\,x + b\,y = c_1$, $l_2 : a\,x + b\,y = c_2$ равно

$$\rho = \frac{|\,c_1 - c_2\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (35)$$

Решение. Если $b \neq 0$, то расстояние от точки $A\left(0, \dfrac{c_1}{b}\right)$ прямой l_1

до прямой l_2 равно $\rho = \dfrac{|\,b\dfrac{c_1}{b} - c_2\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|\,c_1 - c_2\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Если же $b = 0$, то прямые параллельны оси Oy, и их уравнения имеют вид: $x = \dfrac{c_1}{a}$, $x = \dfrac{c_2}{a}$. Поэтому расстояние между ними равно

$$\rho = \left|\frac{c_1}{a} - \frac{c_2}{a}\right| = \frac{|\,c_1 - c_2\,|}{|\,a\,|} = \frac{|\,c_1 - c_2\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Итак, в обоих случаях верно равенство (35).

Задача 10. Описать множество всех векторов $\vec{x}$, сумма которых с некоторым заданным вектором $\vec{a}$ ортогональна этому вектору. Доказать $|\vec{x}| \geq |\vec{a}|$.

Решение. Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Тогда $0 = (\vec{x} + \vec{a})\,\vec{a} = \vec{a}\,\vec{x} + \vec{a}^{\,2}$ и $\vec{a}\,\vec{x} = -|\vec{a}|^2$, т.е. $a_1\,x_1 + a_2\,x_2 = -(a_1^{\;2} + a_2^{\;2})$.

Это уравнение прямой, перпендикулярной вектору $\vec{a}$ (рис.6).

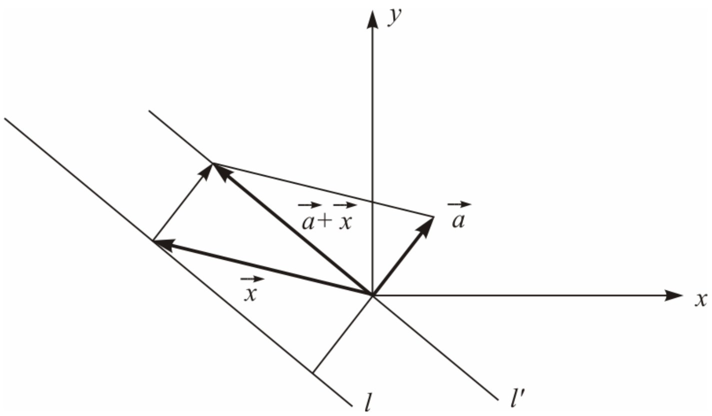


рис.6

Переходя к нормальному уравнению $\frac{-a_1 x - a_2 y}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, получаем, что эта прямая отстоит от начала координат на расстояние $|\vec{a}|$. Отсюда $|x| \geq |\vec{a}|$.

Упражнения

1. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом, если угол прямой с положительным направлением оси Ox равен α и прямая проходит через точку A

а) $\alpha = 30^\circ$, $A(3,1)$; б) $\alpha = 60^\circ$, $A(-2,3)$;

в) $\alpha = 45^\circ$, $A(-4,3)$; г) $\alpha = 120^\circ$, $A(2,-1)$.

2. Написать уравнение с угловым коэффициентом прямой, проходящей через точку A в направлении вектора $\vec{a}$

а) $A(3,-2)$, $\vec{a} = (1,1)$; б) $A(-4,-2)$, $\vec{a} = (-1,3)$;

в) $A(2,5)$, $\vec{a} = (-2,-4)$; г) $A(2,-3)$, $\vec{a} = (2,3)$.

3. Написать уравнение с угловым коэффициентом прямой, проходящей через точки A и B

а) $A(-2,1)$, $B(3,0)$; б) $A(3,2)$, $B(-1,4)$;

в) $A(-4,-2)$, $B(2,1)$; г) $A(5,-3)$, $B(-1,2)$.

4. Написать уравнение в отрезках прямой, проходящей через точки A и B

а) $A(-4,-3),\ B(2,1)$; б) $A(-6,3),\ B(2,4)$;

в) $A(3,2),\ B(2,3)$.

5. Написать уравнения с угловым коэффициентом сторон треугольника ABC

а) $A(-4,3),\ B(2,-4),\ C(4,8)$; б) $A(-4,-8),\ B(0,2),\ C(2,-4)$.

6. Написать уравнения медиан треугольника ABC

а) $A(2,2),\ B(4,-2),\ C(6,0)$; б) $A(-5,1),\ B(3,-3),\ C(5,3)$.

7. Как связаны угловые коэффициенты прямых, симметричных относительно

а) оси O_x; б) оси O_y.

8. Прямая, проходящая через начало координат, делит отрезок AB в отношении $x:y$. Написать уравнение этой прямой с угловым коэффициентом

а) $A(0,1),\ B(1,0),\ x=3,\ y=2$; б) $A(1,4),\ B(5,2),\ x=4,\ y=3$.

9. Написать уравнение в отрезках прямой, проходящей через точку A и отсекающей на осях координат отрезки одинаковой длины

а) $A(-1,5)$; б) $A(2,3)$; в) $A(-3,-4)$.

10. Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку A в направлении вектора $\vec{a}$

а) $A(-2,0),\ \vec{a}=(1,1)$; б) $A(3,2),\ \vec{a}=(-1,-2)$;

в) $A(2,1),\ \vec{a}=(2,3)$; г) $A(-3,-5),\ \vec{a}=(2,6)$.

11. Написать нормальное уравнение прямой, образующей угол α с положительным направлением оси Ox и проходящей через точку A

а) $\alpha = 30^\circ$, $A(-5,4)$; б) $\alpha = 45^\circ$, $A(2,4)$; в) $\alpha = 60^\circ$, $A(-3,-3)$.

12. Найти площадь треугольника ABC

а) $A(1,1)$, $B(-3,2)$, $C(3,4)$; б) $A(-3,0)$, $B(1,3)$, $C(3,-7)$.

13. Доказать, что точки $A\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ и $A'\left(\overline{y},\overline{x}\right)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

14. Доказать, что точки $A(\overline{x},\overline{y})$ и $A'(-\overline{y},-\overline{x})$ симметричны относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

15. Найти точку A', симметричную точке A относительно стороны BC треугольника ABC

а) $A(2,-5)$, $B(-5,4)$, $C(3,-3)$; б) $A(-1,-6)$, $B(-3,0)$, $C(4,5)$.

16. Прямая l является серединой слоя шириной $2d$. Написать уравнения краев слоя

а) $l: -4x+3y=6$, $d=2$; б) $l: 2x-y=4$, $d=1$.

17. Написать уравнение общего вида прямой, проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\vec{a}$

а) $A(-2,1)$, $\vec{a}=(1,3)$; б) $A(1,-4)$, $\vec{a}=(2,-1)$; в) $A(2,3)$, $\vec{a}=(-2,-3)$.

18. Заданы точка A и ее проекция A' на некоторую прямую. Написать уравнение общего вида этой прямой

а) $A(1,4)$, $A'(-3,2)$, б) $A(-1,7)$, $A'(3,1)$.

19. Написать уравнение общего вида высот треугольника ABC

а) $A(-1,3)$, $B(2,5)$, $C(6,-8)$; б) $A(3,-4)$, $B(5,1)$, $C(7,5)$.

20. Написать уравнение прямой, отстоящей от начала координат на расстояние ρ и образующей с положительным направлением оси Ox угол α

а) $\rho=1$, $\alpha=30^\circ$; б) $\rho=4$, $\alpha=45^\circ$; в) $\rho=2$, $\alpha=60^\circ$.

21. Написать уравнение общего вида диагоналей ромба $ABCD$, проверить свойство их перпендикулярности

а) $A(-2,2),\ B(1,3),\ C(2,0),\ D(-1,-1)$;

б) $A(-1,0),\ B(-3,4),\ C(1,6),\ D(3,2)$.

22. Угол A симметричного относительно оси Oy треугольника ABC площади S равен α. Написать уравнения его сторон

а) $A(0,2),\ \alpha = 60^\circ$, $S = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ б) $A(0,4),\ \alpha = 90^\circ$, $S = 9$

23. Прямые l_1 и l_2 симметричны относительно оси O_x и пересекаются в точке $C(x_0, y_0)$. Уравнение одной из них имеет вид $a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0$. Написать уравнение другой прямой.

24. Прямые l_1 и l_2 симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов и пересекаются в точке $C(x_0, y_0)$. Уравнение одной из них имеет вид $a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0$. Написать уравнение другой прямой.

Тема 6. Полярная система координат. Переход от полярной системы координат к прямоугольной декартовой и обратно. Преобразование декартовых координат

Полярная система координат

Положение точки на плоскости вполне определено, если заданы длина отрезка, соединяющего ее с некоторой фиксированной начальной точкой, и угол, который образует этот отрезок с некоторым заданным лучом.

Эти параметры использует так называемая *полярная система координат*. Начальная точка O называется при этом *полюсом*, а заданный луч OE – *полярной осью.*

Пусть задан также масштаб для измерения длин, и как обычно, выбрано положительное направление для измерения углов – против часовой стрелки.

Каждой точке M плоскости теперь соответствует пара полярных координат – длина ρ отрезка OM и угол φ, который образует этот отрезок с полярной осью: $M = M(\rho, \varphi)$.

Можно считать при этом, что $\varphi \in [0, 2\pi]$. Хотя в начальной точке O угол φ не определен, положим для нее $\varphi = 0$, и начальная точка будет иметь тогда нулевые координаты: $O(0, 0)$.

Связь между декартовыми и полярными координатами дается соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (2)$$

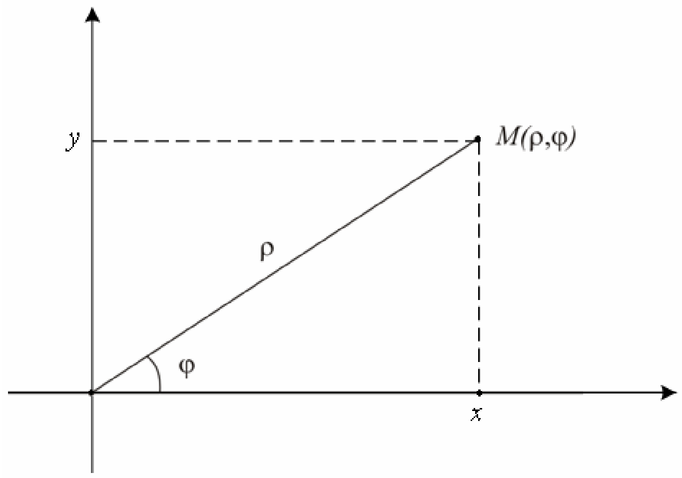


рис.1

Преобразование декартовых координат на плоскости

Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат Oxy, в которой каждая точка M плоскости имеет координаты $M(x, y)$.

Определим на той же плоскости еще одну декартову прямоугольную систему координат $O'x'y'$ с тем же масштабом длин; в этой системе та же точка M будет иметь иные координаты $M(x', y')$.

Будем предполагать, что обе системы координат одновременно или правые, или левые; для определенности будем считать их, например, правыми.

Рассмотрим сначала некоторые частные случаи преобразования координат.

1. Параллельный перенос

В этом случае соответствующие оси параллельны друг другу и имеют одинаковые направления. Пусть в системе координат Oxy полюс O' имеет координаты $O'(a,b)$.

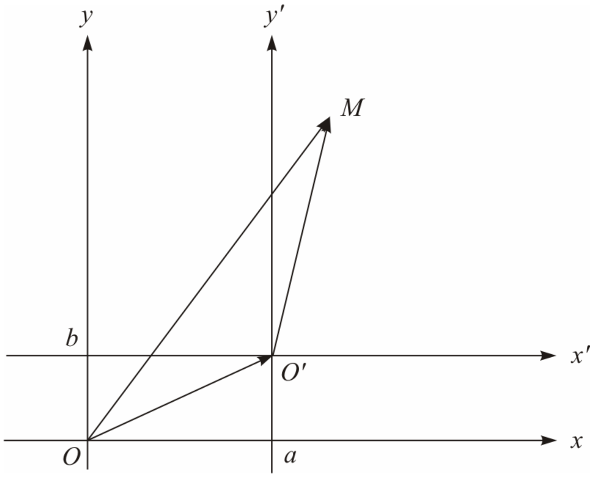


рис.2

Тогда для произвольной точки плоскости M имеем $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, откуда

$$x = x' + a, \quad y = y' + b$$

или

$$x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

2. Поворот осей

В этом случае оси системы координат $Ox'y'$ получаются из соответствующих осей системы Oxy поворотом на один и тот же угол α. В этом случае формулы перехода от системы координат Oxy к системе координат $Ox'y'$ имеют вид

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \tag{5}$$

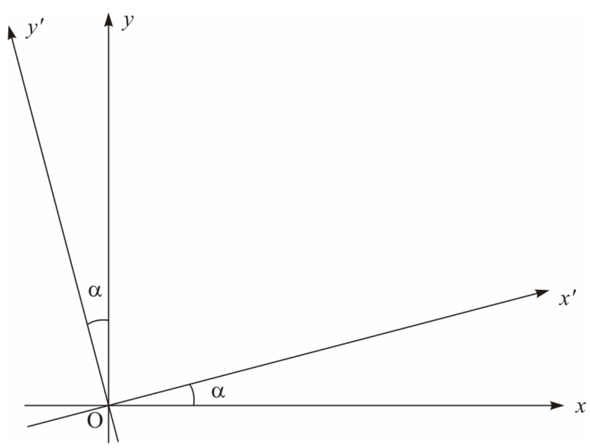


рис.3

Системы координат Oxy и $O'x'y'$ абсолютно симметричны, и можно считать, что сначала была задана система координат $O'x'y'$, а систему координат Oxy получили из нее поворотом на угол $-\alpha$. Поэтому для получения формул перехода от системы координат $Ox'y'$ к системе координат Oxy достаточно в формулах (5) заменить α на $-\alpha$ и поменять местами x и x', y и y' соответственно.

Итак,

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{6}$$

3. Произвольное преобразование координат.

Вернемся к двум произвольным системам координат Oxy и $O'x'y'$ Переход от первой из них ко второй можно представить как последовательное выполнение двух преобразований координат: параллельного переноса и поворота осей.

Соответствующие соотношения поэтому имеют вид

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \tag{7}$$

Решая систему (7) относительно переменных x', y', получаем

$$x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \quad y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) выражают связь между произвольными правыми (или одновременно левыми) прямоугольными декартовыми системами координат.

Задача 1. Найти координаты точек $A(-4,3)$, $B(2,-1)$ после преобразования переноса начала координат в точку $O'(-2,1)$ и поворота на угол $\alpha = 30^\circ$.

Решение. В соответствии с формулами (8) преобразования координат имеем

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(y-1), \quad y' = -\frac{1}{2}(x+2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1).$$

Поэтому после преобразования точки A и B получают координаты

$$A\left(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}\right),\ B\left(-1+2\sqrt{3},\ -2-\sqrt{3}\right).$$

Задача 2. Вывести формулу расстояния между точками $A(\rho_1,\ \varphi_1)$ и $B(\rho_2,\ \varphi_2)$ в полярной системе координат.

Решение. Подставляя соотношения (1) в формулу для расстояния между двумя точками, после элементарных преобразований получаем:

$$\rho^2(A,\ B) = (\rho_1 \cos\varphi_1 - \rho_2 \cos\varphi_2)^2 + (\rho_1 \sin\varphi_1 - \rho_2 \sin\varphi_2)^2 =$$

$$= \rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 - 2\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = \rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом,

$$\rho(A,\ B) = \sqrt{\rho_1{}^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \rho_2{}^2}. \quad (9)$$

Если точки A и B лежат на одном луче, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$, из (9) получаем

$$\rho(A,\ B) = |\rho_1 - \rho_2|.$$

Если $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, то $\rho^2(A,B) = 2\rho^2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] = 4\rho^2 \sin^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ и

$$\rho(A,\ B) = 2\rho \sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}. \quad (11)$$

Задача 3. Найти полярные координаты середины отрезка AB, если точки A и B равноудалены от начала координат.

Решение. Пусть $A = A(\rho_0, \varphi_1)$, $B = B(\rho_0, \varphi_2)$ и точка $C(\rho, \varphi)$ - середина отрезка AB (рис.4). Поскольку треугольник OAB является равнобедренным, то медиана OC является и высотой. Далее,

$$\angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$\varphi = \angle COB + \varphi_2 = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, т.е. вторая полярная координата (угол) середины отрезка равна полусумме соответствующих координат концов отрезка, как и в случае декартовой системы координат.

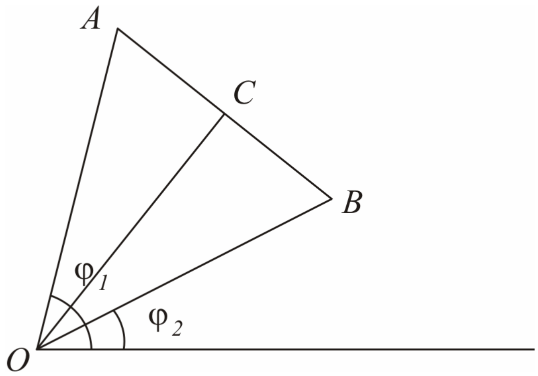


рис.4

Наконец, из прямоугольного треугольника OCB находим

$$\rho = \rho_0 \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Итак, имеем для полярных координат середины отрезка, концы которого равноудалены от начала координат:

$$\rho = \rho_0 \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \qquad (1$$

Задача 4. Написать уравнение прямой в полярной системе координат, проходящей через точку $A(\rho_0, \varphi_0)$ и образующей угол α с полярной осью.

Решение. Поскольку уравнение прямой, проходящей через начало координат, имеет вид $\varphi=\varphi_0$, будем предполагать, что прямая не проходит через начало координат.

Проведем из начала координат прямую l', параллельную исходной прямой l (рис.5).

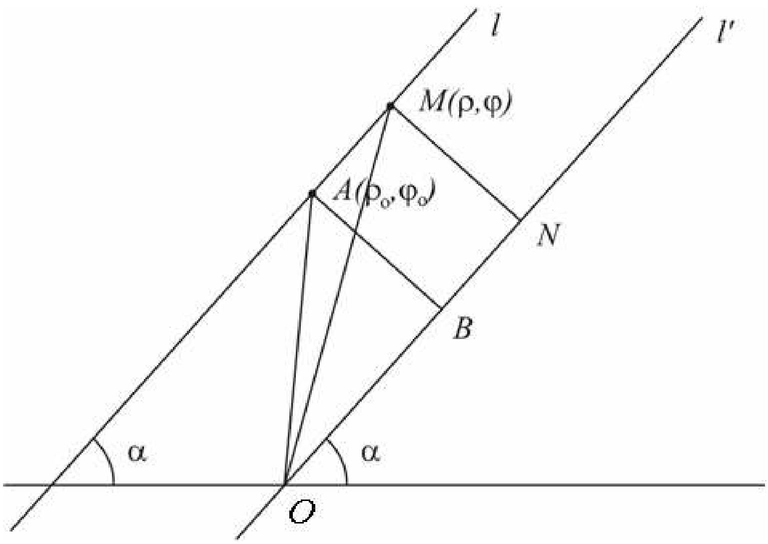


рис.5.

Пусть $M(\rho,\varphi)$ - произвольная точка прямой l. Опустим из точек A и M перпендикуляры AB и MN к прямой l'. Рассматривая треугольники OAB и OMN, получаем

$$MN=\rho\sin(\varphi-\alpha), \quad AB=\rho_0\sin(\varphi_0-\alpha).$$

Поскольку $MN=AB$, то

$$\rho\sin(\varphi-\alpha)=\rho_0\sin(\varphi_0-\alpha). \qquad (13)$$

Нетрудно проверить, что это соотношение справедливо и при ином, нежели на рис.5, расположении прямой и точек M, A на ней.

Задача 5. Написать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(\rho_1, \varphi_1)$, $B(\rho_2, \varphi_2)$ в полярной системе координат.

Решение. Как и выше, считаем, что прямая не проходит через начало координат. Пусть $M(\rho, \varphi)$ - произвольная точка прямой (рис.6).

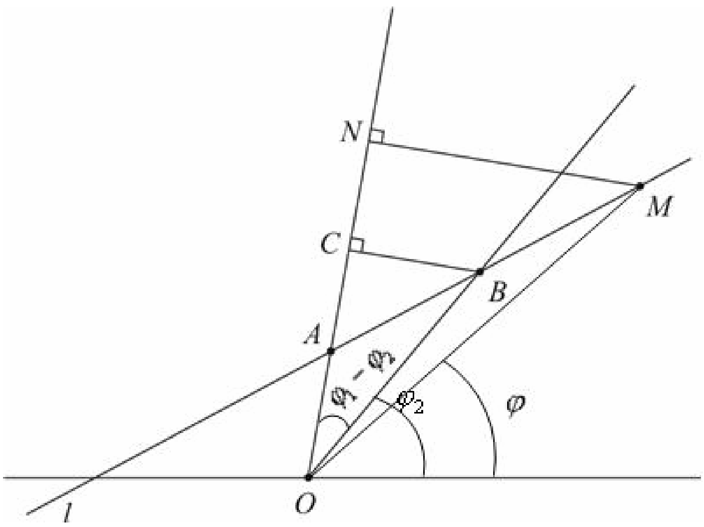


рис.6

Соединим точки A, B с началом координат и опустим из точек B и M перпендикуляры BC и MN к прямой OA, получим подобные треугольники ABC и AMN, в которых $BC = \rho_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$, $MN = \rho \sin(\varphi_1 - \varphi)$. Поскольку $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$,

$$AM^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho\cos(\varphi - \varphi_1),$$

$$AB^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

то получаем уравнение прямой

$$\frac{\rho\sin(\varphi - \varphi_1)}{\rho_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{\frac{\rho^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho\cos(\varphi - \varphi_1)}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}. \qquad (14)$$

Нетрудно проверить, что это соотношение справедливо при любом положении прямой на декартовой плоскости и взаимном расположении точек A, B, M.

Задача 6. Вывести нормальное уравнение прямой в полярной системе координат.

Решение. В прямоугольной системе координат это уравнение имеет вид $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$. Если точка $M(x, y)$ имеет полярные координаты $M(\rho,\varphi)$, то $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$ и

$$p = \rho\cos\alpha\cos\varphi + \rho\sin\alpha\sin\varphi = \rho\cos(\varphi - \alpha).$$

Итак, нормальное уравнение прямой имеет вид

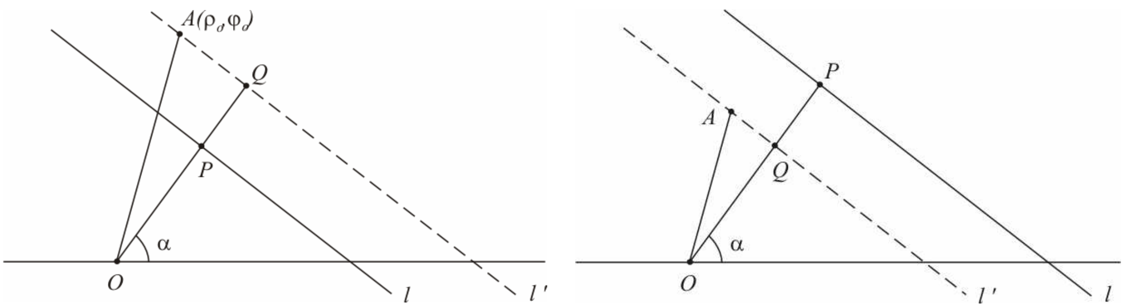
$$\rho\cos(\varphi - \alpha) = p.$$

Задача 7. Вывести формулу расстояния от точки до прямой в полярной системе координат.

Решение. Найдем расстояние от точки $A(\rho_0,\varphi_0)$ до прямой (15). Проведем прямую l', параллельную исходной прямой l, и проходящую через точку A, и пусть точки P, Q - основания перпендикуляров, опущенных из начала координат на прямые l и l' соответственно. Тогда расстояние $\rho = \rho(A, l)$ от точки A до прямой l дает отрезок PQ.

Если $OQ > OP$ (рис.7а), то $\rho = OQ - OP = OQ - p = = OM_0\cos(\alpha - \varphi_0) - p = \rho_0\cos(\alpha - \varphi_0) - p$.

Если же $OP > OQ$ (рис.7б), то $\rho = OP - OQ = p - \rho_0\cos(\alpha - \varphi_0)$



а) б)

рис. 7

Итак, искомое расстояние равно

$$\rho = |\, \rho_0 \cos(\varphi_0 - \alpha) - p \,|.$$

Задача 8. Найти площадь треугольника OAB, где $A(\rho_1, \varphi_1)$, $B(\rho_2, \varphi_2)$.

Решение. Ранее при решении задачи 2 темы 4 было получено, что площадь треугольника OAB в декартовой системе координат равна $S = \frac{1}{2}|\, x_1 y_2 - x_2 y_1 \,|$. Переходя к полярным координатам и проводя те же преобразования, что и при решении задачи 6, получаем

$$S = \frac{1}{2}|\, x_1 y_2 - x_2 y_1 \,| = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2 \,|\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,|.$$

Итак, площадь треугольника, одна из вершин которого – начало координат, равна

$$S = \frac{\rho_1\rho_2 \,|\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,|}{2}.$$

Упражнения

1. Система координат $O'x'y'$ получена из прямоугольной декартовой системы координат Oxy параллельным переносом. Какие координаты получат при этом точки $A(-1, 4)$, $B(3, 2)$, $C(2, -6)$, если

а) $O'(6,-1)$; б) $O'(-4,3)$; в) $O'(2,5)$.

2. Система координат $O'x'y'$ получена из прямоугольной декартовой системы координат Oxy поворотом на угол α. Какие координаты получат при этом точки $A(2,\ 2),\ B(-1,\ 6),\ C(3,\ -4),$ если

а) $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 60^\circ$.

3. Найти координаты точек $A,\ B,\ C$ в исходной системе координат Oxy, если после преобразования переноса начала координат в точку O' и поворота на угол α эти точки получили координаты $A(-4,\ 7),\ \ B(0,\ 3),\ C(3,\ -6)$.

а) $O'(1,\ -2),\ \alpha = 30^\circ$; б) $O'(4,\ 2),\ \alpha = 120^\circ$.

4. Найти полярные координаты точек

$A_1(1,0), A_2(1,1), A_3(0,1), A_4(-1,1), A_5(-1,0),\ \ A_6(-1,-1), A_7(0,1), A_8(1,-1)$.

5. Найти связь полярных координат точек, симметричных относительно

а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат

6. Найти полярные координаты вершин правильного шестиугольника со стороной a, если в декартовой прямоугольной системе координат две его противоположные вершины лежат на оси Ox симметрично относительно начала координат.

7. Найти полярные координаты середины отрезка AB

а) $A\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right),\ B\left(4,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $A\left(1,\ \dfrac{\pi}{3}\right),\ B\left(1,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

8. Найти длину отрезка AB

а) $A\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right),\ B\left(4,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$; б) $A\left(5,\ \dfrac{\pi}{4}\right),\ B\left(3,\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

9. Найти площадь треугольника OAB, если O - полюс и

а) $A\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right),\ B\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$; б) $A\left(3,\ \frac{\pi}{4}\right),\ B\left(3\sqrt{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Найти декартовы координаты точек

$A\left(3,\frac{\pi}{6}\right),\ B\left(2,\frac{\pi}{4}\right),\ C\left(1,\frac{\pi}{3}\right),\quad D\left(4,\frac{2\pi}{3}\right),\quad E\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$, если полюс находится в начале координат, а ось Ox совпадает с полярной осью.

11. Найти расстояние от точки $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ до прямой, отстоящей от начала координат на расстояние $p=4$ и образующей угол $\alpha=\frac{\pi}{6}$ с положительным направлением оси абсцисс.

Тема 7. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных различными видами уравнений. Координаты точки пересечения прямых. Исследование взаимного положения двух прямых

Угол между прямыми

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы их уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1: \ y = k_1 x + b_1, \qquad l_2: \ y = k_2 x + b_2. \tag{1}$$

Если прямые параллельны, то будем считать угол между ними равным нулю; если прямые перпендикулярны, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$. В остальных случаях назовем *углом* между этими прямыми меньший из двух равных пар вертикальных углов. Очевидно, при таком понимании угла он всегда неотрицателен и не более прямого: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Предположим, что прямые l_1 и l_2 не являются ни параллельными, ни перпендикулярными.

Если одна из прямых параллельна оси абсцисс, то угол между прямыми равен углу, образованному второй прямой с осью абсцисс и легко находится по ее угловому коэффициенту.

Поэтому можно считать, что обе прямые не параллельны оси абсцисс.

Пусть, например, $\alpha_1 > \alpha_2$ (рис.1). Рассматривая треугольник PQR, получаем $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, и, следовательно, $tg\alpha = tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

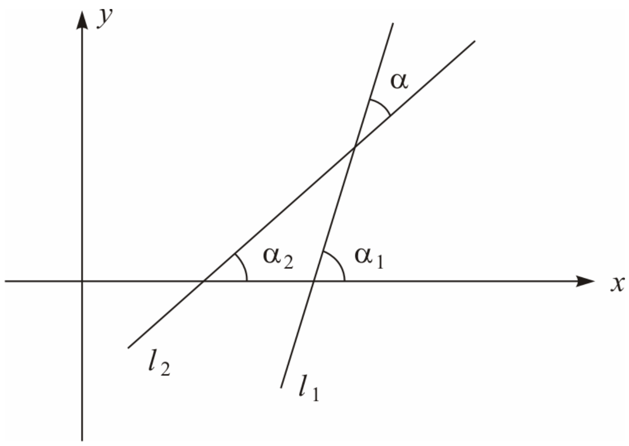


рис. 1

Возможен также случай расположения прямых, при котором $\alpha_1 < \alpha_2$; в этом случае $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Поскольку тангенс острого угла положителен, для объединения этих ситуаций достаточно взять абсолютную величину в числителе правой части.

Таким образом,

$$tg\alpha = \frac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1 \cdot k_2}. \tag{2}$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных различными видами уравнений

1. Прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

Пусть заданы две прямые (1), не параллельные осям координат. Параллельность прямых равносильна равенству углов α_1 и α_2, образованных прямыми с осью абсцисс, и тем самым, равенству их угловых коэффициентов k_1 и k_2.

Утверждение 1. Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты:

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \tag{3}$$

Условия перпендикулярности нетрудно вывести из полученного ранее соотношения для угла между прямыми:

$$tg\alpha = \frac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (4)$$

В силу того, что $tg\frac{\pi}{2}$ не определен, необходимо перейти к нулевому для прямого угла $\mathrm{ctg}\,\alpha,$ т.е. перейти в (4) к обратным величинам. Приравнивая знаменатель правой части (4) нулю, получаем $k_1 k_2 + 1 = 0,$ или

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

И обратно, из этого условия нетрудно получить перпендикулярность прямых.

Утверждение 2. Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

(5)

2. Прямые заданы уравнениями общего вида

Пусть теперь заданы прямые, не параллельные осям координат, своими уравнениями общего вида:

$$l_1: \; a_1 x + b_1 y = c_1, \qquad l_2: \; a_2 x + b_2 y = c_2. \qquad (6)$$

Приводя эти уравнения к виду уравнений с угловыми коэффициентами и используя полученные выше для этих уравнений критерии параллельности и перпендикулярности, получаем

Утверждение 3. Прямые, заданные уравнениями общего вида, параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих переменных в этих уравнениях пропорциональны:

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \qquad (7)$$

Утверждение 4. Прямые, заданные уравнениями общего вида, перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма попарных произведений коэффициентов при соответствующих переменных равна нулю:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \qquad (8)$$

Линейную комбинацию $ax + by$ переменных x, y будем называть *линейной частью* уравнения прямой общего вида.

Линейные части уравнений параллельных прямых использованием условия (7) могут быть приведены к одинаковому виду.

Утверждение 5. Уравнения параллельных прямых могут быть приведены к виду с одинаковой линейной частью.

Если же и правые части в полученных уравнениях параллельных прямых оказались равными, то прямые в этом случае совпадают.

Совпадение прямых мы будем рассматривать как частный случай их параллельности.

Исследование взаимного положения двух прямых. Координаты точки пересечения двух прямых

Пусть заданы две прямые на плоскости их уравнениями общего вида:

$$l_1: \ a_1x + b_1y = c_1, \qquad l_2: \ a_2x + b_2y = c_2$$
(9)

Эти прямые параллельны, но не совпадают в случае

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \tag{10}$$

и совпадают в случае

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{11}$$

Условия (10)-(11) можно распространить и на случай прямых, параллельных осям координат (когда один из коэффициентов линейной части уравнений прямых равен нулю), если потребовать, чтобы соответствующие коэффициенты были нулевыми одновременно у обеих прямых. Эти оговорки не потребуются, если перейти к условиям параллельности прямых в терминах определителей. Соотношение (9) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно переменных x и y, которая либо несовместна (в случае параллельности, но не совпадения прямых), либо совместна и имеет единственное решение (в случае пересечения прямых) или бесконечное множество решений (в случае совпадения прямых).

Рассмотрим матрицу коэффициентов системы уравнений (9), состоящую из двух строк и двух столбцов

$$A =$$

Поскольку в данном случае матрица связана с системой линейных уравнений, ее называют *матрицей системы уравнений*.

Определитель этой матрицы равен $|A| = a_1b_2 - a_2b_1$.

Утверждение 6. Если выполнено условие

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (12)$$

то прямые пересекаются в единственной точке с координатами

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \qquad (13)$$

где

$$A_x = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Если условие (12) не выполнено, то прямые параллельны, но не совпадают в случае

$$|A| = 0, \quad |A_x| \neq 0, \quad |A_y| \neq 0, \qquad (14)$$

и совпадают в случае

$$|A| = |A_x| = |A_y| = 0. \qquad (15)$$

Равенство (13) получается, как нетрудно проверить, непосредственным решением системы двух уравнений (9) с двумя неизвестными.

Заметим, что матрицы A_x и A_y получаются из матрицы A заменой элементов первого или второго столбца соответственно столбцом правых частей уравнений прямых.

Задачи и упражнения

Задача 1. Написать уравнение прямой, перпендикулярной отрезку AB, где $A(2,-4)$, $B(1, 3)$, и проходящей через его середину, используя условие перпендикулярности прямых.

Решение. Угловой коэффициент k_1 прямой AB равен $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -7.$ Угловой коэффициент перпендикулярной ей прямой равен $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{7}.$ Поэтому ее уравнение с угловым коэффициентом имеет вид $y=\frac{1}{7}x+b,$ где параметр b найдем из условия принадлежности середины отрезка $C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ прямой: $b=y-\frac{1}{7}x=-\frac{5}{7}.$ Итак, уравнение прямой имеет вид $y=\frac{1}{7}x-\frac{5}{7}.$

Задача 2. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями общего вида

$$l_1:\ a_1x+b_1y=c_1,\qquad l_2:\ a_2x+b_2y=c_2.$$

Решение. Если одна из прямых параллельна оси $Oy,$ например, прямая $l_1,$ то $b_1=0,$ $b_2\neq 0,$ $\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\alpha.$ Отсюда

$k_2=\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$ и, в силу $k_1=-\frac{a_2}{b_2},$ получаем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b_2}{a_2}.$

Если же обе прямые не параллельны оси $Oy,$ то $b_1\neq 0$ и

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_1-k_2}{1-k_1k_2},$ где $k_1=-\frac{a_1}{b_1},$ $k_2=-\frac{a_2}{b_2}.$ Отсюда имеем для тангенса меньшего из двух смежных углов между прямыми

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}}{1-\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}}\right|=\left|\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2-b_1b_2}\right|.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2-b_1b_2}\right|. \qquad (16)$$

Заметим, что и рассмотренный выше отдельно случай параллельности одной из прямых оси Oy (также, как и случаи параллельности второй прямой оси Oy или параллельности этой оси обеих прямых) укладывается в рамки формулы (16), т.к. при $b_1 = 0$ из (16) получаем $\mathrm{tg}\,\alpha = \left|\frac{b_2}{a_2}\right|$.

Таким образом, соотношение (16) справедливо для всех случаев взаимного расположения прямых.

Задача 3. Параллельные прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями общего вида с одинаковой линейной частью $l(x, y) = ax + by$ и константами c_1 и c_2 соответственно в правых частях. Доказать, что все параллельные прямые внутри слоя между этими прямыми могут быть заданы уравнением с той же линейной частью и константой вида $(1-\alpha)c_1 + \alpha c_2$, $\alpha \in [0, 1]$ в правой части (в частности, центральная прямая слоя задается константой $\frac{c_1 + c_2}{2}$).

Решение. Пусть l - прямая, параллельная прямым l_1 и l_2 и расположенная между ними. Если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ - произвольные точки прямых l_1 и l_2 соответственно, то прямая l пересекает отрезок AB в некоторой точке $C(x_0, y_0)$. Поскольку точка C принадлежит отрезку AB, то $x_0 = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, $y_0 = (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2$, где $\alpha \in [0,1]$. Уравнение прямой l имеет вид $ax + by = c_0$, где, поскольку точка $C(x_0, y_0)$ принадлежит ей,

$$c_0 = ax_0 + by_0 = a[(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2] + b[(1-\alpha)y_1 + \alpha y_2] =$$

$$= (1-\alpha)(ax_1 + by_1) + \alpha(ax_2 + by_2) = (1-\alpha)c_1 + \alpha c_2.$$

Вторая часть утверждения вытекает из того факта, что середина отрезка между прямыми получается при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Задача 4. Написать уравнения прямых, параллельных прямой $l:\ ax+by=c$ и отстоящих от нее на расстояние ρ.

Решение. Пусть $A(x_0, y_0)$ - произвольная точка прямой l. Если правая часть уравнения искомой прямой l' равна c', то расстояние от этой точки до прямой l' равно $\rho = \frac{|ax_0+by_0-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, т.е. $ax_0+by_0-c'=\pm\rho\sqrt{a^2+b^2}$.

Отсюда $c'=c\pm\rho\sqrt{a^2+b^2}$ и получаем две прямые, симметричные относительно исходной прямой

$$ax+by=c\pm\rho\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (17)$$

Задача 5. Пусть заданы параллельные прямые

$$l_1:\ l(x,y)=c_1, \quad l_2:\ l(x,y)=c_2,$$

где $l(x,y)$ - линейная часть их уравнений:

$$l(x,y)=ax+by, \qquad (18)$$

содержащие соответственно точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, и $M_{AB}[\alpha]=(x(\alpha),y(\alpha))$ - точка отрезка AB:

$$x(\alpha)=(1-\alpha)x_1+\alpha x_2,\ \ y(\alpha)=(1-\alpha)y_1+\alpha y_2,\ \ \alpha\in[0,1]. \qquad (19)$$

Обозначим

$$l(\alpha)=l(x(\alpha),\ y(\alpha)), \quad \alpha\in[0,1]. \qquad (20)$$

Тогда $l(\alpha)$ строго возрастает при $c_1<c_2$ и строго убывает при $c_1>c_2$.

Решение. Вместо $l(x,y)$ для наглядности при $M=M(x,y)$ будем писать просто $l(M)$. Имеем

$$l(\alpha)=ax(\alpha)+by(\alpha)=a[(1-\alpha)x_1+\alpha x_2]+b[(1-\alpha)y_1+\alpha y_2]=$$

$$=(1-\alpha)(ax_1+by_2)+\alpha(ax_2+by_2)=(1-\alpha)l(A)+\alpha l(B).$$

Таким образом,

$$M = M_{AB}[\alpha] \Rightarrow l(M) = (1-\alpha)l(A) + \alpha l(B). \qquad (21)$$

Отсюда в силу $l(M) = [l(B) - l(A)]\alpha + l(A)$ получаем требуемое утверждение.

Задача 6. Пусть задана прямая $l:\ ax + by = c.$ Доказать, что для всех точек $M(x, y)$ по одну сторону этой прямой справедливо неравенство $ax + by < c,$ а для всех точек по другую сторону прямой справедливо $ax + by > c.$

Решение. Пусть точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ лежат сначала по разные стороны прямой. Тогда отрезок AB пересекает прямую в некоторой точке $P(x_0\ y_0)$ и $l(P) = c.$

Если $l(A) < c,$ то $l(\alpha)$ строго возрастает в силу $l(P) > l(A)$ и $l(B) > l(P) = c,$ т.е. $l(A) < c,\ l(B) > c.$

Если же $l(A) > c,$ то $l(A)$ строго убывает, т.к. $l(P) < l(A)$ и $l(B) < l(P) = c,$ т.е. $l(A) > c,\ l(B) < c.$

Итак, для точек по разные стороны прямой либо $l(A) < c,\ l(B) > c,$ либо $l(A) > c,\ l(B) < c.$

Пусть теперь точка $A',$ не принадлежащая прямой, лежит по одну сторону с точкой A и, например, $l(A) > c.$ Тогда $l(A') > c,$ ибо в противном случае из $l(A') < c$ получаем, что $l(\alpha)$ строго убывает и, следовательно, в некоторой точке P принимает значение $l(P) = 0,$ что противоречит тому, что отрезок AB не пересекает в этом случае прямую.

Аналогично доказывается, что $l(A') < c$ при $l(A) < c.$

Замечание. Обозначим

$$L(M) = l(M) - c \qquad (20)$$

для точки $M = M(x_0, y_0)$. Тогда для точек прямой l справедливо $L(M) = 0,$ и, наоборот, $L(M) \neq 0$ для точек M , не лежащих на прямой $l.$

В этих обозначениях полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Пусть l - прямая, определяемая уравнением общего вида $ax + by = c.$

Тогда произведение $L(A)L(B) > 0$ для точек A и B, лежащих по одну сторону прямой, и $L(A)L(B) < 0$ для точек A и B, лежащих по разные стороны этой прямой.

Задача 7. Пусть точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ равноудалены от прямой l, заданной уравнением $ax + by = c.$ Тогда $|L(A)| = |L(B)|$.

Решение. Если точки A и B лежат по одну сторону от прямой, то прямая AB параллельна прямой l, т.е. $l(A) = l(B).$

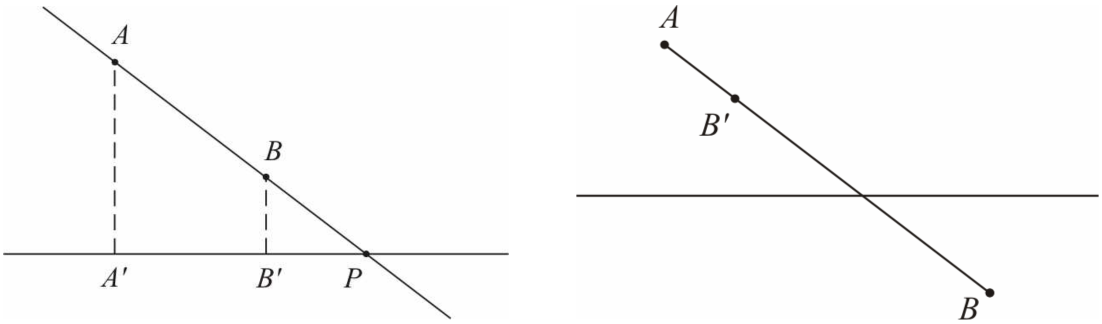
Если же точки A и B лежат по разные стороны от прямой, то середина $Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ отрезка AB лежит на прямой l и

$$c = l(Q) = a\frac{x_1 + x_2}{2} + b\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}(ax_1 + by_1) + \frac{1}{2}(ax_2 + by_2) = \frac{1}{2}(l(A) + l(B)).$$

Отсюда $2c = l(A) + l(B),$ т.е. $l(A) - c = c - l(B)$ и $|L(A)| = |L(B)|$.

Задача 8. Доказать, что если точка A более удалена от прямой $ax + by = c,$ чем точка $B,$ то $|L(A)| > |L(B)|$.

Решение. Пусть сначала точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ лежат по одну сторону прямой l. Поскольку $\rho(A,l) > \rho(B,l),$ то прямая AB пересекает прямую l в некоторой точке $P(x_0, y_0)$ (рис.2а).



а) б)

рис.2

Из подобия треугольников $AA'P$ и $BB'P$ вытекает, что $\frac{BP}{AP} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{\rho(B,l)}{\rho(A,l)},$ т.е. $BP < AP$ и точка B находится между точками A и P.

Пусть $l(A) > c.$ Поскольку $l(P) = c,$ то $l_{PA}(\alpha)$ строго возрастает, т.е. $c < l(B) < l(A)$ и $l(A) - c > l(B) - c > 0.$

Пусть теперь точки A и B лежат по разные стороны прямой. Обозначим через B' точку отрезка AB, лежащую на равном с точкой B расстоянии от прямой: $\rho(B',l) = \rho(B,l),$ тогда $|L(B')| = |L(B)|$. В силу $\rho(A,l) > \rho(B,l)$ точка B' лежит внутри отрезка AP и по одну сторону с точкой A, поэтому $L(A) > L(B') > 0$ и, по доказанному выше, $\boxed{|L(A)| > |L(B')| = |L(B)|.}$ Таким образом, и в этом случае $|L(A)| > |L(B)|$.

Задача 9. Дан треугольник $ABC,$ где

$A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3).$ Определить, лежит ли точка $P(x_0, y_0)$ внутри треугольника.

Решение. Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка плоскости. Введем следующие обозначения:

$$D_{AB}(M) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix},\quad D_{BC}(M) = \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix},\quad D_{AC}(M) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \tag{23}$$

Тогда уравнения сторон треугольника ABC имеют вид

$$(AB):\ D_{AB}(M) = 0,\ (BC):\ D_{BC}(M) = 0,\ (AC):\ D_{AC}(M) = 0 \tag{24}$$

Точка P лежит внутри треугольника ABC тогда и только тогда, когда она лежит по ту же сторону с каждой вершиной относительно прямой, определяемой противолежащей этой вершине стороной.

Таким образом, точка P должна лежать по одну сторону прямой AB с точкой C, по одну сторону прямой BC с точкой A и по одну сторону прямой AC с точкой B. Это означает, что

$$D_{AB}(P) \cdot D_{AB}(C) > 0,\quad D_{BC}(P) \cdot D_{BC}(A) > 0,\quad D_{AC}(P) \cdot D_{AC}(B) > 0 \tag{25}$$

Если ровно одно из произведений (25) равно нулю, то верно одно из равенств в (24) и точка P лежит на одной из сторон треугольника. Если же два произведения из (24) нулевые, то точка P является вершиной треугольника.

Точка P лежит вне треугольника, если хотя бы одно из произведений (25) отрицательно.

Упражнения

1. Найти (меньший) угол между прямыми l_1 и l_2:

а) $y=2x-1,\ y=\dfrac{1}{3}x+1;$ б) $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3},\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3};$

в) $y=-x+1,\ y=(2+\sqrt{3})x-\sqrt{3};$ г) $y=(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3},\ y=x-2.$

2. Наряду с координатами точки A известны также координаты ее проекций A_1 и A_2 на две пересекающиеся прямые. Найти угол между этими прямыми.

а) $A(2,4), A_1(1,5), A_2(4,6),$

б) $A(2+\sqrt{2},0),\ A_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right),\ A_2\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2},\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$

3. Найти углы треугольника ABC.

а) $A(1,1),\ B(5,1),\ C(5,5)$; б) $A(4,2),\ B(2,3),\ C(3+\sqrt{3},3+\sqrt{3}).$

4. Найти угол, который образует с равными его сторонами высота к основанию равнобедренного треугольника ABC.

а) $A(0,1),\ B(1,0),\ C\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right);$ б) $A(-2,1),\ B(1,3),\ C(-4,4).$

5. Среди следующих прямых найти параллельные и перпендикулярные.

$l_1: x-2y=1,\quad l_2: 2x+y=-1,\quad l_3: -x+2y=2,\quad l_4: 2x-y=2,\quad l_5: -4x+y=2,$
$l_6: y=-2x+1,\quad l_7: y=2x-1.$

6. Написать уравнения прямых, проходящих через одну из вершин параллельно противоположной стороне треугольника ABC

.

а) $A(0,3),\ B(2,-4),\ C(5,5)$ б) $A(-6,3),\ B(0,2),\ C(3,4)$

7. Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой l.

а) $A(-3,1),\quad l: 2x+7y=4,$ б) $A(2,-3),\quad l: 4x-5y=0,$

8. Написать уравнения сторон треугольника ABC. Проверить, является ли треугольник прямоугольным.

а) $A(-2,-1),\ B(2,3),\ C(4,1)$ б) $A(-2,1),\ B(-1,3),\ C(1,1)$

9. Написать уравнение прямой, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину.

а) $A(2,-3),\ B(4,1)$ б) $A(3,2),\ B(-1,6)$

в) $A(-1,4),\ B(4,1)$ г) $A(6,2),\ B(2,-4)$

10. Написать уравнения сторон четырехугольника $ABCD$. Проверить, является ли четырехугольник параллелограммом, ромбом, прямоугольником, квадратом.

а) $A(-2,2),\ B(0,1),\ C(4,3),\ D(2,4);$ б) $A(-3,-4),\ B(-2,-1),\ C(1,-2),\ D(0,-5)$

11. Написать уравнения сторон квадрата, если A и B - две его соседние вершины.

а) $A(4,3),\ B(-2,1)$ б) $A(-3,2),\ B(1,3)$

12. Написать уравнения средних линий треугольника ABC. Убедиться, что средние линии параллельны соответствующим сторонам треугольника.

а) $A(-1,0),\ B(4,2),\ C(2,-3)$ б) $A(2,3),\ B(-1,-3),\ C(4,-1)$

13. Указать среди следующих пар прямых пересекающиеся и найти их точки пересечения.

а) $2x-5y=4;\ \ y=0.4x+1$ б) $x=-2+3t;\ \ y=-1-t;\ \ 3x-2y=7$

в) $-3x+4y=-5;\ \ x=1+2t,\ \ y=-1+t$ г) $-3x+2y=6;\ \ y=1.5x-3$

14. Найти параметр a, при котором прямая $y=x+a$ проходит через точку пересечения двух других прямых.

а) $2x-7y=-3,\ -3x+2y=-4;$ б) $2x-3y=7,\ -3x+2y=-8.$

15. Написать уравнения биссектрис углов треугольника.

а) $A(-1,-1),\ B(-1,3),\ C(2,-1);$ б) $A(-1,0),\ B(2,3),\ C(3,-4).$

16. Заданы одна из вершин (точка *A*) равностороннего треугольника *ABC* и прямая *l*, содержащая две другие вершины. Найти эти вершины.

а) *l:* $y=x+2,\ A(2,0);$ б) *l*: $y=\sqrt{3}x+3,\ A(\sqrt{3},0).$

Тема 8. Линии второго порядка на плоскости. Уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы. Уравнения касательных к линиям второго порядка

Уравнение первой степени относительно переменных задает в прямоугольной декартовой системе координат прямую. Здесь мы опишем все линии, которые могут быть заданы в декартовой системе координат уравнением второй степени:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Уравнение окружности

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой ее центром. Расстояние между точками окружности и ее центром называется *радиусом* окружности.

Если $C(x_0, y_0)$ - центр окружности и $r > 0$ - ее радиус, то для произвольной точки $M(x', y')$ окружности справедливо равенство

$$\rho(M$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем уравнение второй степени относительно переменных - уравнение окружности

$$(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 = r^2.$$

Переносом начала координат в центр окружности – точку $C(x_0, y_0)$, т.е. преобразованием $x' = x + x_0,\ y' = y + y_0$ это уравнение приводится к виду

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Уравнение (3) называется *каноническим* уравнением окружности.

Уравнение касательной к окружности (3) в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид

$$x_0 x + y_0 y = r^2.$$

Уравнение эллипса

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, постоянна.

Пусть F_1 и F_2 – фокусы эллипса.

Для вывода уравнения эллипса выберем декартову систему координат следующим образом. Ось Ox направим через фокусы от F_1 к F_2, а ось Oy проведем перпендикулярно отрезку F_1F_2 через его середину (рис.1).

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, постоянную сумму расстояний от точек эллипса до фокусов через $2a$.

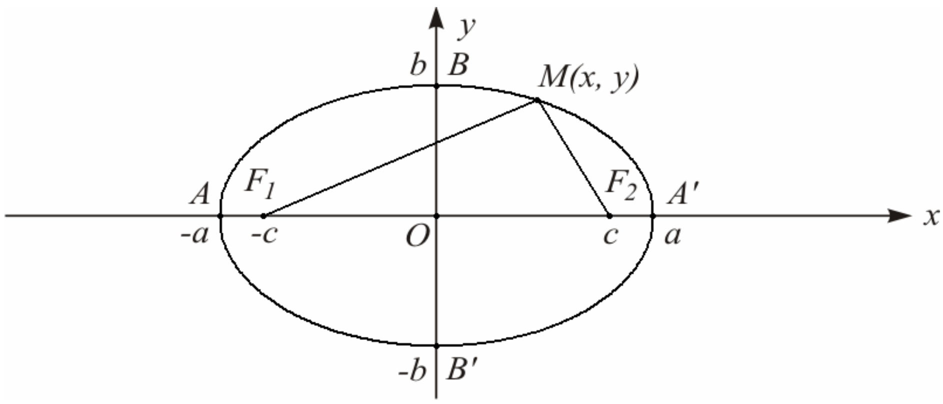


рис.1

Будем считать далее, что

$$c < a. \tag{5}$$

(При $c > a$ искомое множество точек пусто, при $c = a$ - задает отрезок $F_1 F_2$). В построенной системе координат фокусы

F_1 и F_2 имеют координаты: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Обозначим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, тогда

b^2

следовательно

$$a > b.$$

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка эллипса. Тогда, согласно определению эллипса,

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

где

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \; F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

После ряда преобразований уравнение (6) эллипса приобретает вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнение (7) называется *каноническим* уравнением эллипса.

При $a = b$ оба фокуса F_1 и F_2 совпадают с началом координат, т.е. эллипс преобразуется в окружность.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются его *вершинами.*

Прямые, относительно которых эллипс симметричен, называются его *осями* (симметрии). *Центром* эллипса называют точку пересечения его осей. Для эллипса, заданного каноническим уравнением, его осями являются оси координат, а центр совпадает с началом координат. Заметим, что эллипс симметричен также относительно его центра.

Отрезки OA, OA', OB, OB' называются *полуосями* эллипса.

Полуоси OA, OA' называются *большими*, а полуоси OB, OB' - *малыми*. Величину

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

называют *эксцентриситетом* эллипса. Очевидно, $0 < \varepsilon < 1$, причем, чем ближе ε к нулю, тем более эллипс походит на окружность; при $\varepsilon = 0$ получаем $a = b$, и эллипс превращается в окружность. При ε, близком к единице, эллипс, наоборот, сильно «сплющен».

Таким образом, эксцентриситет характеризует форму эллипса.

Параметрическое уравнение эллипса имеет вид

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t\ ,\ \ t \in [0, 2\pi)\,. \qquad (9$$

Уравнение касательной к эллипсу в произвольной его точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Уравнение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянна.

Обозначим фокусы через F_1 и F_2. Пусть $F_1F_2 = 2c$, а постоянную разность расстояний обозначим через $2a$. Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то

$$|\, F_1M - F_2M \,| = 2a.$$

Будем предполагать, что

$$a < c.$$

Выберем декартову систему координат так же, как мы это делали при построении эллипса: направим ось Ox через точки F_1 и F_2, а ось Oy – перпендикулярно отрезку F_1F_2 через середину этого отрезка. Имеем

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (13)$$

Обозначим $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, тогда $b^2 = c^2 - a^2$.

Подставляя величины (13) в (11), после элементарных преобразований получаем *каноническое* уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

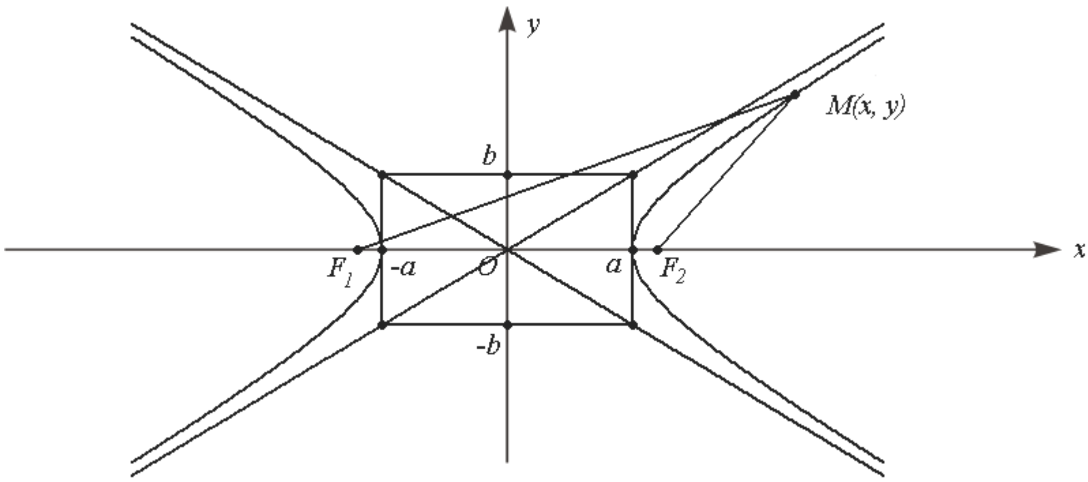


рис.2

Эксцентриситетом гиперболы называют величину

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Для гиперболы всегда $\varepsilon > 1$. Как и выше, у эллипса, эксцентриситет гиперболы характеризует ее форму: чем ближе ε к единице, тем «уже» гипербола, тем меньше угол, образованный ее асимптотами $y = \pm\frac{b}{a}x.$

Уравнение касательной к гиперболе в точке $M_0(x_0 y_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки (называемой *фокусом*) и заданной прямой (называемой *директрисой*).

Для вывода уравнения параболы выберем прямоугольную декартову систему координат следующим образом. Ось Ox направим через фокус перпендикулярно директрисе, а ось Oy - перпендикулярно оси Ox через середину отрезка, соединяющего фокус с директрисой.

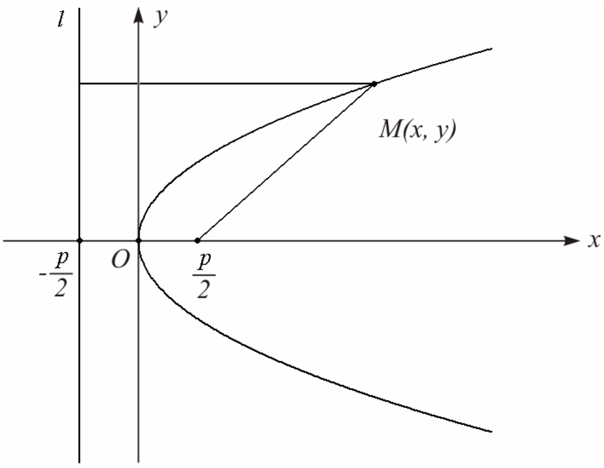


рис.3

Обозначим через p расстояние между фокусом и директрисой, тогда $F = F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, и директриса задается уравнением

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка параболы. Тогда расстояние от нее до фокуса равно $\rho_1=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, расстояние до прямой $\rho_2=\frac{p}{2}+x.$

Для параболы $\rho_1=\rho_2,$ и, следовательно,

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x.$$

Возводя обе части этого уравнения в квадрат и преобразуя его, получаем

$$y^2=2px.$$

Это уравнение называется *каноническим* уравнением параболы.

Величина p называется *фокальным параметром* параболы.

Величина фокального параметра равна длине перпендикуляра, восстановленного из фокуса, до точки пересечения с любой из двух ветвей параболы.

Действительно, $y\left(\frac{p}{2}\right)=\sqrt{2p\cdot\frac{p}{2}}=p.$

Чем больше фокальный параметр, тем «шире» парабола. Иногда рассматриваются также параболы с уравнениями

$$y^2=-2px,\ \ x^2=2py,\ \ x^2=-2py.$$

Они также задают параболы; первая из них является симметричным отражением построенной нами параболы относительно оси ординат, а две остальные имеют в качестве оси симметрии ось ординат и направлены вверх и вниз соответственно.

Уравнение касательной к параболе (19) в точке $M_0\left(x_0 y_0\right)$ имеет вид

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду

Пусть задано произвольное уравнение второго порядка

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \qquad (21$$

в котором присутствуют либо квадраты переменных, либо их произведения (иначе это уравнение становится уравнением первого порядка и, следовательно, задает прямую). Покажем, что справедливо

Утверждение 1. Произвольное уравнение второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат может задавать только одну из следующих линий: эллипс, гиперболу, параболу, пару пересекающихся прямых, пару параллельных прямых.

Действительно, нетрудно проверить, что в некоторой системе координат OXY, полученной поворотом на угол α, определяемый уравнением

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a-c}{b},$$

это уравнение можно привести к виду

$$AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0, \qquad (23$$

в котором отсутствует произведение переменных.

Соответствующее преобразование переменных имеет вид

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \qquad (24)$$

Поэтому можно считать, что кривая задана уравнением (23). Выделяя полные квадраты тех переменных, квадраты которых в уравнении (23) присутствуют, мы приведем это уравнение к уравнению, в котором, помимо констант, присутствуют либо только квадраты переменных, либо квадрат одной переменной и первая степень другой. Учитывая различные соотношения между знаками коэффициентов при переменных и (или) их квадратах, получаем перечень кривых, приведенных в утверждении.

Покажем, как получить формулы преобразования поворота (24), не находя явно угол поворота.

Если $a=b,$ то преобразование, приводящее к уравнению без произведения переменных, имеет вид

$$x=x'+y', \;\; y=x'-y'.$$

Действительно, производя эту замену переменных, получаем уравнение

$$(2a+b)(x')^2+(2a-b)(y')^2+(d+e)x'+(d-e)y'+f=0. \qquad (26)$$

Заметим, что, в силу (22), при $a=c$ $\operatorname{ctg}2\alpha=0$ и $\cos\alpha=0,$ т.е. $2\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ и $\alpha=\pm\frac{\pi}{4}.$ Преобразование (25), если сравнить его с преобразованием (24), как раз соответствует повороту на угол $\alpha=-\frac{\pi}{4},$ совмещенному с преобразованием сжатия-растяжения $x'=s\,X,\;\; y'=t\,Y,$ где в данном случае $s=t=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Пусть теперь $a \neq c,$ тогда $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{b}{a-c}.$ Поскольку $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$ то, обозначая $\operatorname{tg} 2\alpha = p,$ $\operatorname{tg}\alpha = q,$ получаем уравнение

$$pq^2 + 2q - p = 0$$

относительно $q.$ Отсюда

$$q = \frac{\pm\sqrt{1+p^2}-1}{p}.$$

Можно считать, что $-\pi \le 2\alpha \le \pi,$ т.е. $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2},$ и угол α находится в первой или последней четверти. В первом случае в формуле (27) выбирается знак плюс, во втором – знак минус. Зная $q = \operatorname{tg}\alpha,$ находим коэффициенты преобразования

$$\sin\alpha = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}. \qquad (2$$

Задачи и упражнения

Задача 1. Определить тип линии второго порядка по ее уравнению:

а) $5x^2 + 5y^2 + 6xy + 6x - 10y - 3 = 0$;

б) $x^2 + 11y^2 + 10\sqrt{3}xy - 4x - 20\sqrt{3}\,y + 20 = 0$;

в) $(2+5\sqrt{3})x^2 + (2-5\sqrt{3})y^2 - 10xy - 24 = 0$;

г) $3x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}xy - (2\sqrt{3}+8)x + (8\sqrt{3}-2)y - 7 = 0$.

Решение.

а) В уравнении присутствует произведение переменных, но $a = c,$ поэтому применяя преобразование (25), получаем уравнение

$$16(x')^2 + 4(y')^2 + 16x' - 4y' - 3 = 0.$$

Перейдем в полученном уравнении к полным квадратам обеих переменных:

$$16\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 =$$

Наконец, деля обе части последнего уравнения на число в его правой части, получаем

$$\frac{\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

Уравнение (29) является уравнением эллипса с центром в точке $O'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (рис.4).

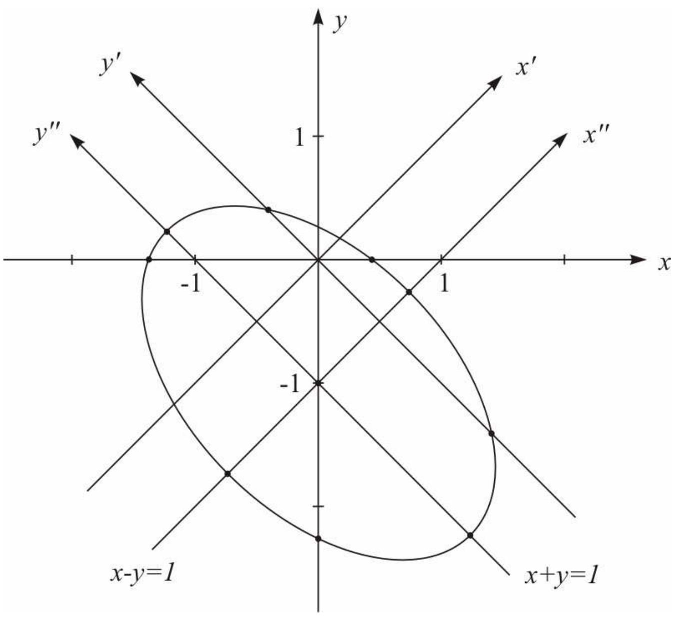


рис.4

б) Находим угол для преобразования поворота: $\operatorname{tg} 2\alpha = -\sqrt{3}$ и $\alpha = -\dfrac{\pi}{6}$. Отсюда получаем преобразование

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x' + y'\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(-x' + \sqrt{3}y'\right).$$

После элементарных преобразований получаем в новой системе координат уравнение

$$(x')^2 - 4(y')^2 - 2\sqrt{3}x' + 8y' - 5 = 0.$$

Выделяя полные квадраты переменных, получаем уравнение

$$\left(x' - \sqrt{3}\right)^2 - 4(y' - 1)^2$$

и, окончательно,

$$\frac{\left(x' - \sqrt{3}\right)^2}{4} - (y' - 1)^2 = 1.$$

Это уравнение задает гиперболу с центром в точке $O'\left(\sqrt{3}, 1\right)$ (рис.5).

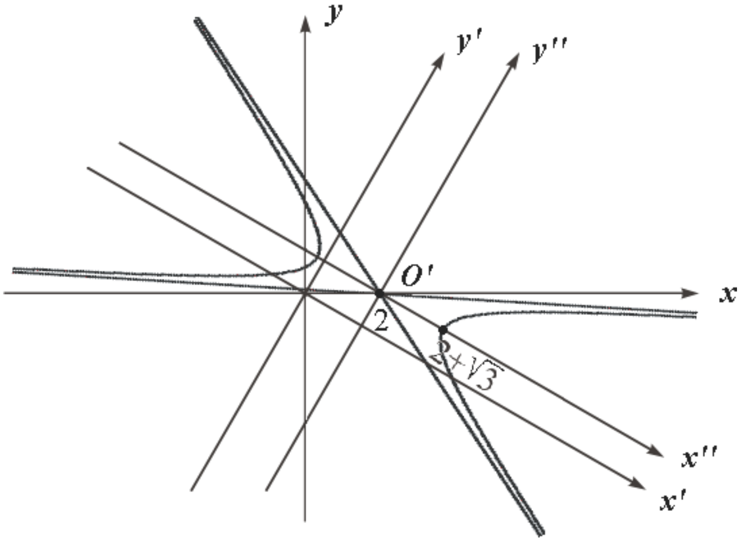


рис.5

в) В данном случае $a = 3,\ b = 2\sqrt{3},\ c = 1.$ Найдем угол поворота системы координат:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b}{a-c} = \sqrt{3},\ \alpha =$$

Применяя преобразование

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x' - y'\right),\ y = \frac{1}{2}\left(x' + \sqrt{3}y'\right),$$

получаем уравнение $4(x')^2 - 4x' + 16y' - 7 = 0$. Выделяя полный квадрат переменной x', получаем $4\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + 16y' - 8 = 0$ или

$$\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{2}\right) = 0$$

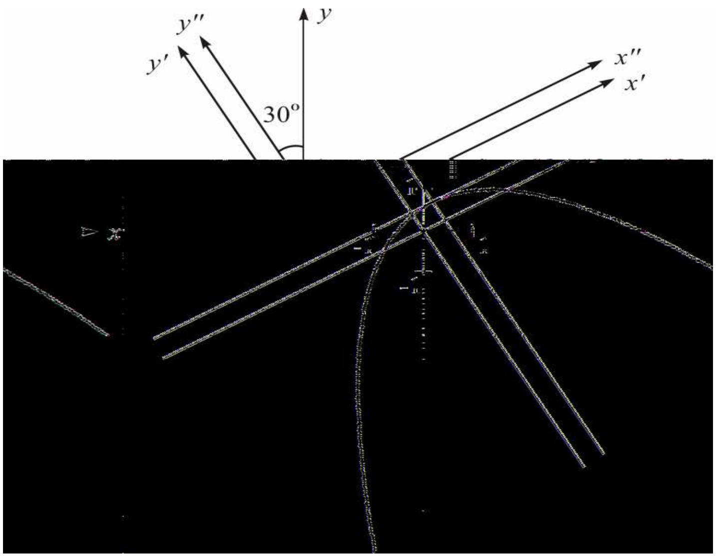


рис.6

Полученное уравнение является уравнением параболы с вершиной в точке $O'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

г) Для нахождения коэффициентов преобразования поворота будем использовать соотношения (27)-(28):

$$p = \frac{24}{7},\ q = \frac{3}{4},\ \sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Итак, преобразование имеет вид

$$x = \frac{1}{5}(4x' - 3y'), \;\; y = \frac{1}{5}(3x' + 4y').$$

После упрощений получаем уравнение $(x')^2 - (y')^2 - 2y' - 1 = 0$, или $(x')^2 - (y' + 1)^2 = 0.$ Отсюда $(x' - y' - 1)(x' + y' + 1) = 0.$

Поэтому исходное уравнение задает пару перпендикулярных прямых

$$x' - y' = 1, \quad x' + y' = -1,$$

пересекающихся в точке $O'(0, -1)$ (рис.7)

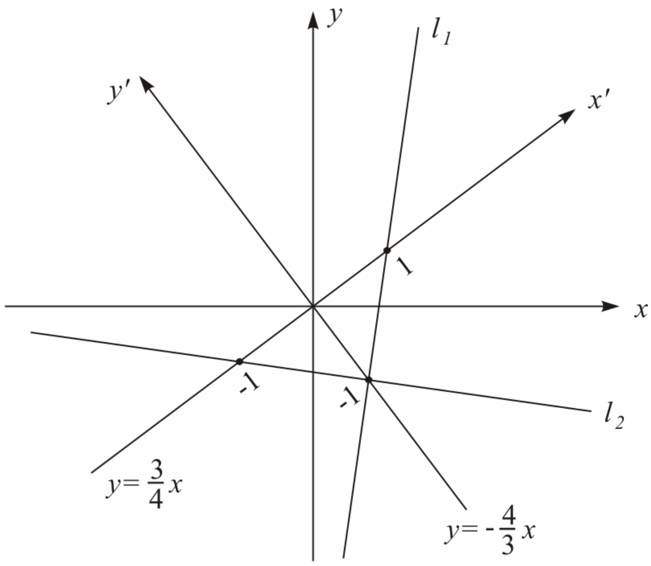


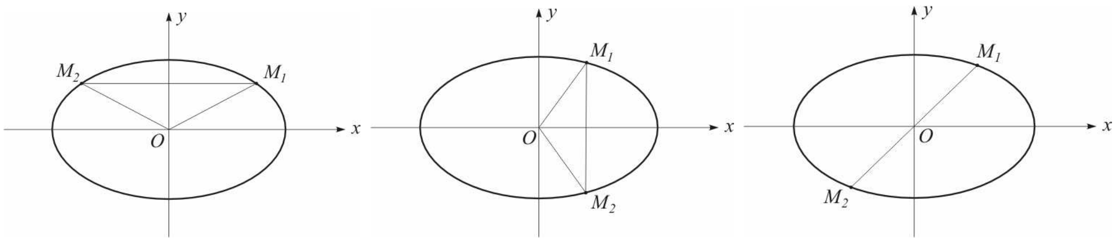
рис.7

Задача 2. Доказать, что если расстояния от центра до двух точек эллипса одинаковы, то эти точки симметричны либо относительно центра эллипса, либо относительно его осей.

Решение. Естественно считать, что эллипс не является окружностью, т.е. $a \neq b,$ т.к. в случае окружности все расстояния от ее точек до центра одинаковы.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ - точки эллипса (рис.8) и $OM_1 = OM_2$, т.е. $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Отсюда

$$y_1{}^2 - y_2{}^2 = -\left(x_1{}^2 - x_2{}^2\right).$$



а) б) в)

рис.8.

Поскольку точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат эллипсу, то имеем также соотношения

$$b^2 x_1{}^2 + a^2 y_1{}^2 = a^2 b^2,\ b^2 x_2{}^2 + a^2 y_2{}^2 = a^2 b^2.$$

Вычитая второе из этих равенств из первого, получаем

$$b^2\left(x_1{}^2 - x_2{}^2\right) + a^2\left(y_1{}^2 - y_2{}^2\right) = 0. \qquad (34$$

Далее, из (33) следует $(b^2 - a^2)(x_1{}^2 - x_2{}^2) = 0$ и, в силу $a \neq b$, получаем $x_1{}^2 = x_2{}^2$. Поэтому $|x_1| = |x_2|$, откуда, учитывая (33), получаем $y_1{}^2 = y_2{}^2$. Отсюда и $|y_1| = |y_2|$, т.е. справедливы равенства

$$|x_1| = |x_2|,\ |y_1| = |$$

Таким образом, если $x_1 = x_2$, то $y_1 = -y_2$, и точки симметричны относительно оси Ox; если $y_1 = y_2$, то $x_1 = -x_2$, и точки симметричны относительно оси Oy; если же $x_1 = -x_2$, $y_1 = -y_2$, то точки симметричны относительно центра.

Задача 3. Доказать, что касательные к эллипсу в двух различных точках параллельны тогда и только тогда, когда эти точки симметричны относительно центра.

Решение. Пусть касательные

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1,\ \frac{x_2}{a^2}x+\frac{y_2}{b^2}y=1 \qquad (3$$

в точках $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ параллельны. Поскольку касательные к противоположным вершинам эллипса (симметричным относительно центра) параллельны, то далее будем считать, что эти точки не являются вершинами эллипса. Из параллельности касательных получаем $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$, т.е. координаты точек пропорциональны и, обозначая коэффициент пропорциональности через λ, получаем $x_2=\frac{1}{\lambda}x_1,\ y_2=\frac{1}{\lambda}y_1$. Поскольку точка B принадлежит эллипсу, то $\frac{\left(\frac{1}{\lambda}x_1\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{1}{\lambda}y_1\right)^2}{b^2}=1$, или $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\lambda^2$. Отсюда, поскольку точка A принадлежит эллипсу, получаем $\lambda^2=1$. При $\lambda=1$ точки совпали бы, поэтому $\lambda=-1$ и $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=-1$, т.е. $x_2=-x_1,\ y_2=-y_1$.

Обратно, подставляя соотношения $x_2=-x_1,\ y_2=-y_1$ в уравнения касательных, получаем, очевидно, параллельные прямые.

Задача 4. Доказать что касательные к эллипсу (заданному каноническим уравнением) в точках

$$M_1(x,y),\ M_2(-x,y),\ M_3(-x,-y),\ M_4(x,-y),$$

где

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad ($$

параллельны биссектрисам координатных углов, отсекают на осях координат равные отрезки длиной $\sqrt{a^2+b^2}$ и взаимно перпендикулярны.

Решение. Непосредственной подстановкой координат точек в уравнение эллипса убеждаемся, что точки (36) принадлежат эллипсу.

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M(x_i, y_i)$ имеет вид

$$\frac{x_i}{a^2}x + \frac{y_i}{b^2}y = 1, \quad (i = 1,2,3,4). \qquad (3$$

Подставляя координаты точек M_i $(i = 1,2,3,4)$, получаем уравнения касательных в этих точках

$$x + y = \sqrt{a^2+b^2}, \ -x + y = \sqrt{a^2+b^2}, \ -x - y = \sqrt{a^2+b^2}, \ x - y = \sqrt{a^2+b^2}. \qquad (38)$$

Заметим, что эллипс оказался вписанным в квадрат со сторонами, заданными уравнениями (38), длиной стороны, равной $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, и вершинами, лежащими на осях координат (рис.9).

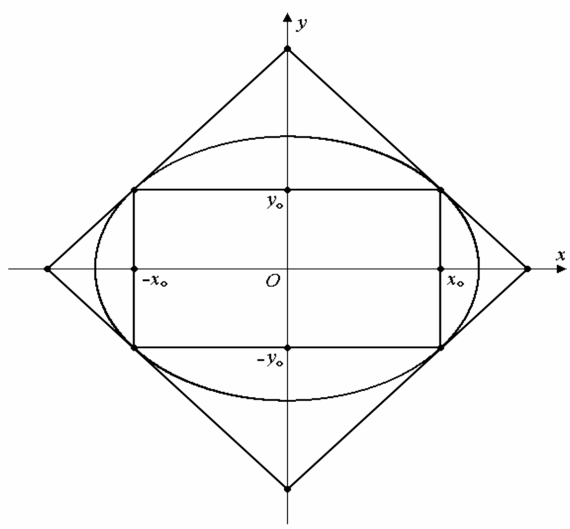


рис.9.

Задача 5. Доказать, что точки

$$M_1^{\,n}(x_n, y_n),\ M_2^{\,n}(-x_n, y_n),\ M_3^{\,n}(-x_n, -y_n),\ M_4^{\,n}(x_n, -y_n), \qquad (39)$$

где

$$x_n = \frac{a^n}{\sqrt{a^{2n-2}+b^{2n-2}}},\ \ y_n = \frac{b^n}{\sqrt{a^{2n-2}+b^{2n-2}}}\ \ (n = 2,\ 3, \ldots), \qquad (40)$$

принадлежат эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ причем,

если $a > b,$ то

(1) $x_{n+1} > x_n,\ y_{n+1} < y_n;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0;$

(3) $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \le x_n < a, \quad 0 < y_n \le \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}};$

если $a < b,$ то

(4) $x_{n+1} < x_n,\ y_{n+1} > y_n;$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b;$

(6) $0 < x_n \le \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \le y_n < b.$

Решение. Пусть $a > b.$ Тогда $a^2 > b^2$ и, умножая обе части этого неравенства на $a^{2n}b^{2n}$, получаем $a^{2n+2}b^{2n+2} > a^{2n}b^{2n}.$ Прибавляя к обеим частям этого неравенства a^{4n} и вынося общий множитель, получаем

$$a^{2n+2}(a^{2n-2}+b^{2n-2}) > a^{2n}(a^{2n}+b^{2n}).$$

Наконец, деля обе части неравенства на $(a^{2n}+b^{2n})(a^{2n-2}+b^{2n-2}),$

получаем

$$\frac{a^{2n+2}}{a^{2n}+b^{2n}} > \frac{a^{2n}}{a^{2n-2}+b^{2n-2}},$$

т.е. $(x_{n+1})^2 > x_n{}^2$. Отсюда $x_{n+1} > x_n$.

Второе неравенство в (1) доказывается аналогично.

Последовательности (40) являются монотонными и ограниченными, следовательно, имеют предел. Имеем

$$x_n = a\sqrt{\frac{a^{2n-2}}{a^{2n-2}+b^{2n-2}}} = \frac{a}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-2}}}.$$

Поскольку $\frac{b}{a}<1$, то $\left(\frac{b}{a}\right)^{2n-2} \to 0$ и $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Аналогично доказываются равенства (4)-(6).

Задача 6. Написать уравнения сторон прямоугольника, описанного вокруг эллипса, и найти его размеры, если одна из точек касания - $M_1(x_1, y_1) \quad (x_1 \geq 0,\ y_1 \geq 0)$.

Решение. Поскольку противоположные стороны прямоугольника параллельны, то, согласно задаче 3, точки M_1 и M_3, M_2 и M_4 симметричны относительно начала координат, т.е.

$$M_3(-x_1, y_1),\ M_4(-x_2, -y_2). \qquad (4$$

Найдем координаты $x_2,\ y_2$. Из перпендикулярности касательных (37) в точках M_1 и M_2 получаем

$$\frac{x_1x_2}{a^4} + \frac{y_1y_2}{b^4} = 0.$$

Отсюда $\frac{y_2}{x_2} = -\frac{x_1b^4}{y_1a^4}$, и, обозначая эту величину $\lambda = -\frac{b^4x_1}{a^4y_1}$, получаем $y_2 = \lambda x_2$.

Подставляя это соотношение в уравнение эллипса, получаем

$$1=\frac{x_2{}^2}{a^2}+\frac{\lambda^2 x_2{}^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^8 x_1{}^2 x_2{}^2}{a^8 y_1{}^2 b^2}=\frac{a^6 y_1{}^2+b^6 x_1{}^2}{a^8 y_1{}^2}x_2{}^2,$$

т.е. $x_2{}^2=\frac{a^8 y_1{}^2}{a^6 y_1{}^2+b^6 x_1{}^2}$. Поэтому, считая, что $x_2\le 0,\ y_2\ge 0,$ получаем

$$x_2=-\frac{a^4 y_1}{\sqrt{b^6 x_1{}^2+a^6 y_1{}^2}},\ y_2=\frac{b^4 x_1}{\sqrt{b^6 x_1{}^2+a^6 y_1{}^2}}. \tag{43}$$

Длины сторон прямоугольника равны удвоенным расстояниям от начала координат до его сторон, т.е. для их нахождения удобно использовать нормальные уравнения касательных. Поскольку нормирующий множитель уравнения (37) равен $\frac{1}{\sqrt{\frac{x_i^2}{a^2}+\frac{y_i^2}{b^2}}}=\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_i{}^2+a^4y_i{}^2}}$, то нормальное уравнение касательной в точке $M_i(x_i,y_i)$ имеет вид

$$\frac{b^2}{\sqrt{b^4x_i{}^2+a^4y_i{}^2}}x+\frac{a^2}{\sqrt{b^4x_i{}^2+a^4y_i{}^2}}y=\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_i{}^2+a^4y_i{}^2}}, \tag{44}$$

и расстояния от начала координат до касательной равны

$$\rho_i=\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_i{}^2+a^4y_i{}^2}}\quad (i=1,2,3,4). \tag{45}$$

Отсюда длины сторон прямоугольника

$$h_1=\frac{2a^2b^2}{\sqrt{b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2}},\quad h_2=\frac{2a^2b^2}{\sqrt{b^4x_2{}^2+a^4y_2{}^2}}. \tag{46}$$

Задача 7. Найти все симметричные относительно осей координат прямоугольники, описанные вокруг эллипса.

Решение. Пусть $M_1(x_1,y_1)$ - точка касания прямоугольника с эллипсом, лежащая в первой четверти. Если M_1 - вершина, то $x_1=a,\ y_1=0,$ и из (41), (43) получаем, что и остальные точки касания прямоугольника M_2, M_3, M_4 также являются вершинами эллипса.

Пусть теперь точка M_1 не является вершиной, тогда $0 < x < a,\ 0 < y < b.$

Если точка M_2 симметрична точке M_1 относительно оси $Oy,$ то точки M_3 и M_4 также симметричны относительно этой оси и в силу (41), (43) справедливы равенства

$$x_1 = -\frac{a^4 y_1}{\sqrt{b^6 x_1^{\ 2} + a^6 y_1^{\ 2}}},\ y_1 = -\frac{b^4 x_1}{\sqrt{b^6 x_1^{\ 2} + a^6 y_1^{\ 2}}}.$$

Отсюда $\frac{x_1}{y_1} = \frac{a^4 y_1}{b^4 x_1}$ и $b^4 x_1^{\ 2} = a^4 y_1^{\ 2},$ т.е. $y_1^{\ 2} = \frac{b^4}{a^4} x_1^{\ 2},$ Далее,

$1 = \frac{x_1^{\ 2}}{a^2} + \frac{y_1^{\ 2}}{b_2^{\ 2}} = \frac{x_1^{\ 2}}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} x_1^{\ 2} = \frac{a^2 + b^2}{a^4} x_1^{\ 2},$ т.е. $x_1^{\ 2} = \frac{a^4}{a^2 + b^2},\ y_1^{\ 2} = \frac{b^4}{a^2 + b^2}$ и

точка M_1 совпадает с точкой M_1 из (36). Поэтому прямоугольник является квадратом со сторонами (38).

Таким образом, существует только два симметричных относительно осей координат прямоугольника, описанных вокруг эллипса:

квадрат со сторонами

$$\pm x \pm y = \sqrt{a^2 + b^2},$$

параллельными биссектрисам координатных углов, точками касания

$$M_1(x, y),\ M_2(-x, y),\ M_3(-x, -y),\ M_4(x, -y), \qquad (48)$$

где

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

и вершинами

$$A_1(\sqrt{a^2+b^2},0),\ A_2(0,\sqrt{a^2+b^2}),\ A_3(-\sqrt{a^2+b^2},0),\ A_4(0,-\sqrt{a^2+b^2}), \qquad (49)$$

и прямоугольник со сторонами

$$x = \pm a,\ \ y = \pm b,$$

параллельными осям координат, точки касания которого с эллипсом совпадают с вершинами эллипса.

Задача 8. Доказать, что среди всех прямоугольников, описанных вокруг эллипса, прямоугольник (50) имеет наименьшую площадь, а квадрат (47) – наибольшую.

Решение. Произвольный прямоугольник, описанный вокруг эллипса, с точкой касания $M_1(x_1, y_1)$ в первой четверти, согласно (43), имеет во второй четверти точку касания

$$M_2\left(-\frac{a^4 y_1}{\sqrt{b^6 x_1{}^2 + a^6 y_1{}^2}}, \frac{b^4 y_1}{\sqrt{b^6 x_1{}^2 + a^6 y_1{}^2}}\right). \qquad (51)$$

В силу (46) площадь этого прямоугольника равна

$$S_1 = \frac{4a^4 b^4}{\sqrt{b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2}\sqrt{b^4 x_2{}^2 + a^4 y_2{}^2}}. \qquad (52$$

Используя (43), получаем

$$\sqrt{b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2} = \sqrt{\frac{b^4 a^8 y_1{}^2 + a^4 b^8 x_1{}^2}{b^6 x_1{}^2 + a^6 y_1{}^2}} = \frac{a^2 b^2 \sqrt{b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2}}{\sqrt{b^6 x_1{}^2 + a^6 y_1{}^2}}.$$

Отсюда площадь произвольного описанного вокруг эллипса прямоугольника в силу (52) равна

$$S_1 = \frac{4a^2 b^2 \sqrt{b^6 x_1{}^2 + a^{\dots}}}{b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2 \dots}$$

Подставляя в это равенство $y_1^{\ 2} = b^2\left(1 - \dfrac{x_1^{\ 2}}{a^2}\right)$, получаем

$$S_1 = \frac{4a^2b\sqrt{a^6 + (b^4 - a^4)x_1^{\ 2}}}{a^4 + (b^2 - a^2)x_1^{\ 2}}. \qquad ($$

Площадь прямоугольника (50) равна $S_2 = 4ab.$ Докажем, что $S_1 \ge S_2.$ Это неравенство эквивалентно неравенству

$$a\sqrt{a^6 + (b^4 - a^4)x_1^{\ 2}} \ge a^4 + (b^2 - a^2)x_1^{\ 2}.$$

Возводя в квадрат обе его части и проводя элементарные преобразования, получаем

$$(b^2 - a^2)^2 x_1^{\ 4} + [2a^4(b^2 - a^2) - a^2(b^4 - a^4)]x_1^{\ 2} \le 0,$$
$$(b^2 - a^2)x_1^2[(b^2 - a^2)x_1^{\ 2} + a^2(a^2 - b^2)] = x_1^{\ 2}(b^2 - a^2)(x_1^{\ 2} - a^2) \le 0.$$

Поскольку последнее из них в силу $|\,x_1\,| \le a$ очевидно, неравенство $S_1 \ge S_2$ доказано.

Площадь квадрата (47) равна $S_3 = 2(a^2 + b^2)$ Докажем, что $S_1 \le S_3.$

В силу (53) это неравенство эквивалентно следующему

$$2a^2b\sqrt{a^6 + (b^4 - a^4)x_1^{\ 2}} \le (a^2 + b^2)[a^4 + (b^2 - a^2)x_1^{\ 2}].$$

Возводя в квадрат обе части этого неравенства, получаем неравенство

$$Ax_1^{\ 4} + Bx_1^{\ 2} +$$

где $A = (b^4 - a^4)^2,$

$$B = 2(a^2 + b^2)^2\, a^4(b^2 - a^2) - 4a^4b^2(b^4 - a^4) =$$

$$= 2a^4(b^2 - a^2)[a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2b^2(a^2 + b^2)] = 2a^4(b^2 - a^2)(a^4 - b^4) = 2a^4\left(a^2 - b^2\right)^2\left(a^2 + b^2\right),$$

$$C = a^8(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 4a^{10}b^2 = a^{12} - 2a^{10}b^2 + a^8b^4 = a^8(a^2 - b^2)^2\ .$$

Поэтому $Ax_1^{\ 4} + Bx_1^{\ 2} + C = (a^2 - b^2)^2[(a^2 + b^2)^2 x_1^{\ 4} - 2a^4(a^2 + b^2)x_1^{\ 2} + a^8] =$

$= (a^2 - b^2)^2[(a^2 + b^2)x_1^{\ 2} - a^4]^2 \ge 0,$

и неравенство $S_1 \le S_3$ также доказано.

Таким образом, когда точка $M_1(x_1, y_1)$ движется по эллипсу в положительном направлении от вершины $A(a, 0)$ к вершине $B(0, b)$, площадь описанного прямоугольника с точкой касания M_1 сначала возрастает от минимального значения до максимального, затем опять убывает до исходного минимального значения.

Задача 9. Доказать, что квадрат со сторонами (47) является единственным квадратом, описанным вокруг эллипса.

Решение. Пусть точками касания квадрата с эллипсом являются точки $A_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4).$

Расстояния (45) от начала координат до касательных - сторон квадрата равны, т.е. величины ρ_i равны для всех четырех точек:

$$\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x_i^2 + a^4y_i^2}} = p.$$

Но тогда и величина

$$b^4x_i^2 + a^4y_i^2 = q$$

одинакова для этих точек. Поскольку точка A_i принадлежит эллипсу, то

$$b^2x_i^2 + a^2y_i^2 = a^2b^2 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Домножим это равенство сначала на b^2, затем на a^2, получим два верных равенства

$$b^4x_i^2 + a^2b^2y_i^2 = a^2b^4, \quad a^2b^2x_i^2 + a^4y_i^2 = a^4b^2,$$

суммируя которые, получаем

$$q = b^4x_i^2 + a^4y_i^2 = a^2b^2(a^2 + b^2) - a^2b^2(x_i^2 + y_i^2).$$

Это означает, что величина

$$x_i^{\ 2} + y_i^{\ 2} = \frac{a^2b^2(a^2+b^2)-q}{a^2b^2} = a^2b^2 - \frac{q}{a^2b^2} = r$$

также не зависит от выбора точки A_i. Но тогда расстояния

$$OA_i = \sqrt{x_i^{\ 2} + y_i^{\ 2}} = \sqrt{r} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

от начала координат до этих точек также одинаковы:

Согласно задаче 2, это означает, что точки A_1 и A_2 симметричны относительно оси Oy, точки A_2 и A_3 - относительно Ox, точки A_3 и A_4 - относительно оси Oy, и точки A_1 и A_4 - относительно оси Ox. Поэтому их координаты

$$A_1(x_1, y_1),\ A_2(-x_1, y_1),\ A_3(-x_1, -y_1),\ A_4(x_1, -y_1).$$

Из (37) нетрудно найти точки пересечения касательных

$$B_1\left(\frac{a^2}{x_1},\ 0\right),\ B_2\left(0,\ \frac{b^2}{y_1}\right),\ B_3\left(-\frac{a^2}{x_1},\ 0\right),\ B_4\left(0, -\frac{b^2}{y_1}\right)$$

лежащие на осях координат.

Условие (42) перпендикулярности касательных в точках A_1 и A_2 с учетом полученных соотношений между их координатами имеет вид

$$-\frac{x_1^{\ 2}}{a^4} + \frac{y_1^{\ 2}}{b^4} = 0.$$

Отсюда $\frac{x_1^{\ 2}}{a^2} = \frac{a^2}{b^4} y_1^{\ 2}$, и, подставляя эту величину в уравнение эллипса, получаем $1 = \frac{a^2}{b^4} y_1^{\ 2} + \frac{y_1^{\ 2}}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^4} y_1^{\ 2}$, т.е. $y_1^{\ 2} = \frac{b^4}{a^2+b^2}$ и

$$y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отсюда

$$x_1^{\ 2}=\frac{a^4}{b^4}y_1^{\ 2}=\frac{a^4}{a^2+b^2}, \text{ т.е. } x_1=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Сравнивая найденные координаты с (36), получаем $A_i=M_i \ \ (i=1,2,3,4)$.

Задача 10. Доказать, что гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ содержит точки

$$M_1^{\ n}(x_n,y_n),\ M_2^{\ n}(-x_n,y_n),\ M_3^{\ n}(-x_n,-y_n),\ M_4^{\ n}(x_n,-y_n), \qquad (54)$$

где

$$x_n=\frac{a^n}{\sqrt{a^{2n-2}-b^{2n-2}}},\ y_n=\frac{b^n}{\sqrt{a^{2n-2}-b^{2n-2}}},\ (a>b) \qquad (55)$$

или

$$x_n=\frac{a^n}{\sqrt{b^{2n-2}-a^{2n-2}}},\ y_n=\frac{b^n}{\sqrt{b^{2n-2}-a^{2n-2}}},\ (a<b), \qquad (56)$$

причем

(1) $x_{n+1}<x_n,\ \ y_{n+1}<y_n;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=0;$

(3) $a<x_n<\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}},\ 0<y_n<\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}} \quad (a<b);$

(3') $a<x_n<\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}},\ 0<y_n<\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (a>b).$

Решение. Если $a>b,$ то, умножая верное равенство $-b^2>-a^2$ на $a^{2n}b^{2n-2}$, получаем $-a^{2n}b^{2n}>-a^{2n+2}b^{2n-2}$. Прибавляя к обеим частям неравенства по a^{4n} и извлекая квадратный корень, получаем $\sqrt{a^{2n}(a^{2n}-b^{2n})}>\sqrt{a^{2n+2}(a^{2n-2}-b^{2n-2})}$, и, наконец, разделив обе части последнего неравенства на $\sqrt{(a^{2n}-b^{2n})(a^{2n-2}-b^{2n-2})}$,

получаем $x_n=\dfrac{a^n}{\sqrt{(a^{2n-2}-b^{2n-2})}}>\dfrac{a^{n+1}}{\sqrt{(a^{2n}-b^{2n})}}=x_{n+1}$.

Отсюда в силу ограниченности последовательности x_n вытекает существование предела. Его величина находится точно так же, как и при решении задачи 5. Границы изменения последовательности x_n также вытекают из ее монотонности.

Доказательство для y_n и случая $a<b$ проводится аналогично.

Задача 11. Определить, при каких условиях для касательной в точке $M_1(x_1,y_1)$ гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ существует перпендикулярная ей касательная в некоторой другой точке той же ветви гиперболы.

Решение. Уравнение касательной в точке M_1 гиперболы имеет вид

$$\frac{x_1}{a^2}x-\frac{y_1}{b^2}y=1.$$

Предположим, что существует точка $M_2(x_2,y_2)$ гиперболы, в которой касательная $\dfrac{x_2}{a^2}x-\dfrac{y_2}{b^2}y=1$ перпендикулярна касательной (57). Условие их перпендикулярности имеет тот же вид (42), что и для эллипса. Проводя те же преобразования, что и при решении задачи 6, получим, что при выполнении условия

$$a^6{y_1}^2-b^6{x_1}^2>0$$

координаты точки M_2 равны

$$x_2 = \pm \frac{a^4 y_1}{\sqrt{a^6 y_1^{\ 2} - b^6 x_1^{\ 2}}}, \ \ y_2 = \pm \frac{b^4 x_1}{\sqrt{a^6 y_1^{\ 2} - b^6 x_1^{\ 2}}}. \qquad (59)$$

Таким образом, условие (58) является необходимым и достаточным условием существования точки M_2 с перпендикулярной касательной. Преобразуем это условие. Поскольку $\frac{y_1^{\ 2}}{b^2} = \frac{x_1^{\ 2}}{a^2} - 1,$

то $y_1^{\ 2} = \frac{b^2}{a^2}(x_1^{\ 2} - a^2)$ и, в силу (58),

$0 < a^6 y_1^{\ 2} - b^6 x_1^{\ 2} = b^2[(a^4 - b^4)x_1^{\ 2} - a^6].$

Итак, получаем условие $(a^4 - b^4)x_1^{\ 2} > a^6.$ Отсюда $a > b$ и $x_1^{\ 2} > \frac{a^6}{a^4 - b^4};$ следовательно, в силу (58), $y_1^{\ 2} > \frac{b^6}{a^6} x_1^{\ 2} > \frac{b^6}{a^4 - b^4}.$

Таким образом, окончательно получаем условия существования перпендикулярной касательной:

$$a > b, \qquad |x_1| > \frac{a^3}{\sqrt{a^4 - b^4}}, \ \ |y_1| > \frac{b^3}{\sqrt{a^4 - b^4}}. \qquad (60)$$

В этом случае координаты точки касания равны

$$x_2 = \pm \frac{a^4 y_1}{\sqrt{a^6 y_1^{\ 2} - b^6 x_1^{\ 2}}}, \ \ y_2 = \pm \frac{b^4 x_1}{\sqrt{a^6 y_1^{\ 2} - b^6 x_1^{\ 2}}}. \qquad (61)$$

Знаки плюс или минус здесь следует выбирать из следующих соображений. Знак первой координаты x_2 совпадает со знаком координаты x_1 точки $M_1(x_1, y_1)$: если эта точка лежит на правой ветви гиперболы, то $x_1 > 0,\ x_2 > 0;$ для левой ветви соответственно $x_1 < 0,\ x_2 < 0.$ Знак второй координаты y_2 противоположен знаку координаты y_1 точки $M_1(x_1, y_1).$

Дадим геометрическую интерпретацию этих условий. Условие $a > b$ означает, что угловой коэффициент асимптоты к гиперболе $k = \frac{a}{b} < 1.$ Это значит, что $tg\alpha < 1$ где α - угол, который касательная образует с осью $Ox.$ Отсюда $\alpha < \frac{\pi}{4}$ и, поскольку вторая асимптота симметрична первой относительно оси Ox, угол между асимптотами не превосходит прямого угла. Понятно, что если бы этот угол был больше прямого или равен ему, то перпендикулярных касательных к гиперболе не существовало бы.

В точках $A(a,0),\ B(-a,0)$ (вершинах гиперболы) касательная вертикальна, и нет точки гиперболы, в которой касательная была бы ей перпендикулярна (т.е. горизонтальна). Условие (60) показывает, что касательная, перпендикулярная к касательной в точке $M_1,$ существует только для точек $M_2,$ достаточно удаленных от вершин гиперболы.

Задача 12. Среди точек одной и той же ветви гиперболы, касательные в которых взаимно перпендикулярны, найти симметричные относительно оси $Ox.$

Решение. В силу (61) симметричность этих точек относительно оси Ox означает, что

$$\frac{a^4 y_1}{\sqrt{a^6 {y_1}^2 - b^6 {x_1}^2}} = x_1, \quad \frac{b^4 x_1}{\sqrt{a^6 {y_1}^2 - b^6 {x_1}^2}} = y_1.$$

Поскольку $x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0,$ то отсюда $\frac{a^4 y_1}{b^4 x_1} = \frac{x_1}{y_1}$ и $a^4 {y_1}^2 = b^4 {x_1}^2$, т.е.

$${y_1}^2 = \frac{b^4}{a^4} {x_1}^2.$$

Точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит гиперболе, поэтому

$$1 = \frac{x_1^{\ 2}}{a^2} - \frac{y_1^{\ 2}}{b^2} = \frac{x_1^{\ 2}}{a^2} - \frac{b^2}{a^4} x_1^{\ 2} = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x_1^{\ 2},$$

т.е. $x_1 = \pm \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $y_1 = \pm \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. (62)

Таким образом, единственная пара симметричных относительно оси Ox точек правой ветви гиперболы с взаимно перпендикулярными касательными - это точки

$$M_1^{\ 2}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right),\ M_4^{\ 2}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$$

из (54). Для левой ветви параболы соответственно получаем пару точек

$$M_2^{\ 2}\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right),\ M_3^{\ 2}\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right).$$

Уравнения касательных в точках $M_1^{\ 2}$ и $M_4^{\ 2}$ имеют вид

$$x - y = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad x + y = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Соответственно уравнения касательных в точках $M_2^{\ 2}$ и $M_3^{\ 2}$

$$x + y = -\sqrt{a^2 - b^2},\ x - y = -\sqrt{a^2 - b^2}.$$

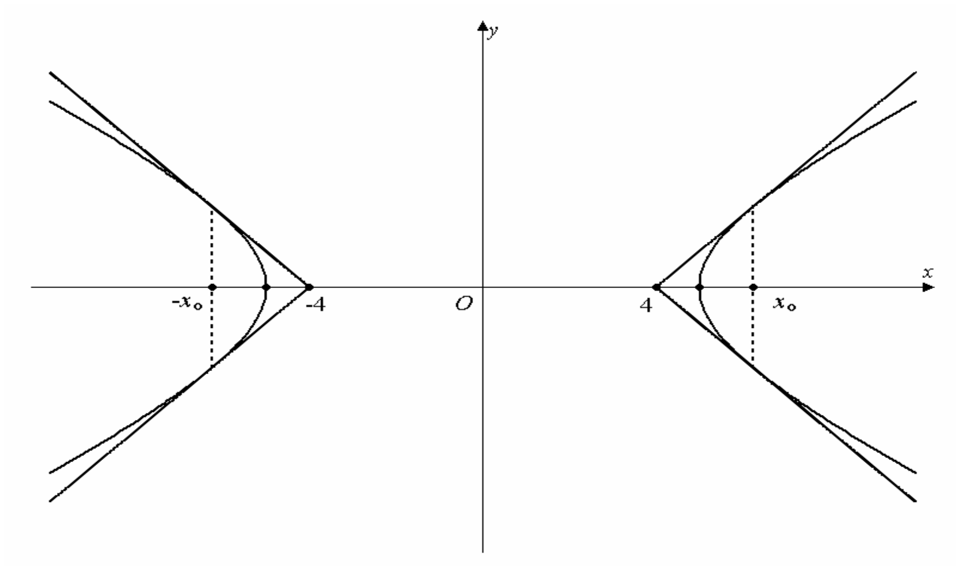


рис.10

Задача 13. Найти точки параболы $y^2 = 2px$, касательные в которых взаимно перпендикулярны. Среди этих точек найти симметричные относительно оси Ox.

Решение. Уравнения касательных в точках $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеют вид

$$yy_1 = p(x + x_1), \;\; yy_2 = p(x + x_2)$$

или (63)

$$px - y_1 y = -px_1, \;\; px - y_2 y = -px_2.$$

Условие их перпендикулярности имеет вид $p^2 + y_1 y_2 = 0$, или

$$y_1 y_2 = -p^2.$$

Отсюда $y_1^2 y_2^2 = p^4$, $4p^2 x_1 x_2 = p^4$ и

$$x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}.$$

Таким образом, касательные к параболе перпендикулярны в точках, координаты которых удовлетворяют условиям

$$x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}, \;\; y_1 y_2 = -p^2.$$

Пусть теперь точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox, т.е. $y_1 = -y_2 = y,\ x_1 = x_2 = x.$ Тогда из (64) получаем $x^2 = \frac{p^2}{4}$, т.е. $x = \frac{p}{2}$ и $y = \pm p.$

Касательные (63) в найденных точках $M_1\left(\frac{p}{2}, p\right)$ и $M_2\left(\frac{p}{2}, -p\right)$ имеют уравнения

$$px - py = -\frac{p^2}{2},\ \ px + py = -\frac{p^2}{2}$$

или, после сокращения на p,

$$x - y = -\frac{p}{2}, \quad x + y = -\frac{p}{2}. \qquad (65)$$

Упражнения

1. Привести уравнения линий второго порядка к каноническому виду. Определить тип линии. Найти полуоси, фокусы, асимптоты (в случае их существования).

а) $x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0$; б) $4x^2 - 8x + y^2 - 4y - 8 = 0$

2. Написать уравнение окружности с центром в точке C и проходящей через точку A.

а) $C(-4,4),\ A(0,4)$; б) $C(-3,1),\ A(-1,1)$;

в) $C(2,1),\ A(-2,3)$; г) $C(-2,2),\ A(-5,1)$.

3. Написать уравнение окружности, имеющей следующие касательные

а) $y = x - 1,\ y = 4 - x,\ y = x + 4$; б) $y = \frac{1}{2}x,\ y = \frac{1}{2}x + 2,\ y = -2x$.

4. Написать уравнения касательных к окружности $x^2-2x+y^2-4y+1=0$ в точке A

а) $A(1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2})$; б) $A(1+\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$.

5. Написать уравнение вершин C прямоугольных треугольников $ABC,$ противолежащих их общей гипотенузе AB:

а) $A(-2,0),\ B(2,3);$; б) $A(-1,-2),\ B(3,2).$

6. Написать уравнение касательных к эллипсу $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1,$ проходящих через точку $A.$ Найти точку касания.

а) $A(0,4)$; б) $A(4,0)$

7. Найти лежащие на оси Ox центры двух симметричных относительно оси Oy эллипсов, если касательные к эллипсам в точке их пересечения взаимно перпендикулярны и соответствующие полуоси эллипсов совпадают и равны соответственно

а) $a=4,\ b=3;$ б) $a=2,\ b=1$

8. Вокруг эллипса $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ описан ромб с углами 60° и 120°. Написать уравнения сторон ромба и найти их точки касания с эллипсом.

9. Найти площадь прямоугольника, описанного вокруг эллипса, если одной из точек касания является точка M_1

а) $M_1\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\quad \frac{x^2}{4}+y^2=1;$ б) $M_1\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right);\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

10. Написать уравнение середин отрезка длины $\rho,$ концы которого скользят по осям координат.

11. Показать, что площадь квадрата, описанного вокруг эллипса, больше площади описанного вокруг него прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат.

12. Найти угол между асимптотами гиперболы

а) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1;$ б) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$

13. Написать уравнение гиперболы с вершинами $(\pm a, 0)$, для которой касательные в точках с абсциссой x_0 взаимно перпендикулярны.

а) $a = 2,\ x_0 = 4;$ б) $a = 3,\ x_0 = 5.$

14. Написать уравнение гиперболы с асимптотами, пересекающимися под углом 2α, если расстояние между ее вершинами равно $2a$.

а) $\alpha = 30^\circ, a = 1;$ б) $\alpha = 60^\circ, a = 2.$

15. Написать уравнение касательных к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$ проходящих через точку A.

а) $A(1,0)$ б) $A(3,2).$

16. Доказать, что для всех точек $M(x, y)$ гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ справедливо неравенство $\left|\frac{y}{x}\right| < \frac{b}{a}.$

17. Доказать, что прямая $y = kx$ пересекает гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ тогда и только тогда, когда $|k| < \frac{b}{a}.$

18. Доказать, что угловой коэффициент k касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ удовлетворяет неравенству $|k| > \frac{b}{a}.$

19. Доказать, что не существует касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, проходящей через начало координат.

20. Показать, что данное уравнение задает параболу. Написать уравнение касательной к ней в точке A.

а) $x^2+y^2-2xy-7\sqrt{2}x+5\sqrt{2}y+9=0,\ \ A(1,4);$

б) $x^2+3y^2+2\sqrt{3}xy-4(1+2\sqrt{3})x'+4(2-\sqrt{3})y'+4=0,\ \ A(-1,1).$

21. Найти связь параметров линий второго порядка с уравнениями $ax^2 \pm bx+cy^2 \pm dy+e=0$.

Тема 9. Плоскости и прямые в трехмерном пространстве. Уравнение плоскости. Способы задания прямой в трехмерном пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Различные виды уравнений плоскости

1. Уравнение плоскости общего вида

Уравнение вида

$$ax + by + cz = d \tag{1}$$

является линейным относительно переменных $x, y, z.$ Линейную комбинацию переменных $ax + by + cz$ будем называть *линейной частью* уравнения. Естественно считать, что среди его коэффициентов a, b, c при линейной части есть ненулевые.

Утверждение 1.

(1) Всякая плоскость трехмерного пространства может быть задана линейным уравнением.

(2) Всякое линейное уравнение задает некоторую плоскость.

Действительно, пусть Π - некоторая плоскость. Выберем некоторую прямоугольную систему координат $Oxyz$ и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - некоторая точка плоскости. Выберем любой вектор $\overrightarrow{M_0N} = (a, b, c),$ перпендикулярный плоскости. Тогда точка $M(x, y, z)$ только в том случае принадлежит плоскости Π, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_0N}$.

Вспоминая условие ортогональности векторов, получаем

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \qquad (2)$$

Полагая $d=ax_0+by_0+cz_0$, получаем уравнение (1). Итак, плоскость в прямоугольной декартовой системе координат задается линейным уравнением. В силу линейности преобразования переменных при переходе к иной системе координат это справедливо и для произвольной общей системы координат.

Следствие 1. Вектор коэффициентов при переменных в уравнении плоскости (вектор нормали) $\vec{n}=(a,b,c)$ перпендикулярен плоскости (1).

Уравнение (1) называется *уравнением плоскости общего вида*, или, кратко, *общим уравнением* плоскости.

2. Уравнение плоскости в отрезках.

Если в (1) все коэффициенты линейной части ненулевые, то его можно привести к виду

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,$$

где $p=\dfrac{d}{a},\ q=\dfrac{d}{b},\ z=\dfrac{d}{c}.$

Уравнение (3) называется *уравнением плоскости в отрезках*. Как и в случае одноименного уравнения прямой, своим названием оно обязано тому факту, что абсолютные величины чисел $|p|, |q|, |r|$ в знаменателях определяют величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях Ox, Oy, Oz соответственно.

3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум векторам

Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и векторы $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\, b_2,\, b_3)$. Эти векторы, отложенные от точки M_0, определяют плоскость Π. Поскольку для произвольной точки $M(x,y,z)$ этой плоскости векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны, то равенство

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

дает уравнение плоскости Π.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданных точки

Пусть заданы три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Плоскость Π, определяемая ими, может быть задана также точкой A и векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Поэтому уравнение этой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

5. Нормальное уравнение плоскости

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат задана плоскость Π, не проходящая через начало координат. Опустим из начала координат перпендикуляр OP на плоскость Π. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор нормали к плоскости (рис.1).

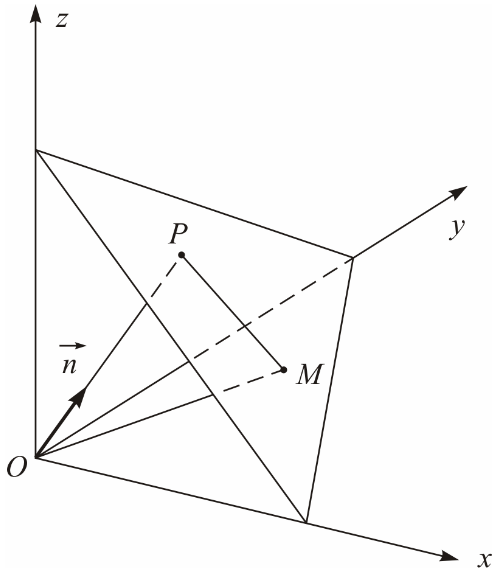


рис.1

Если α, β, γ - углы, образуемые вектором нормали $\vec{n}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно, то

$$\vec{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \tag{6}$$

Поэтому его координаты называют *направляющими косинусами*. Поскольку вектор единичный, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{7}$$

Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости Π. Тогда

$$OP = \left|\vec{\pi}_{\vec{n}}(\overrightarrow{OM})\right| = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Обозначая величину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость Π, через $p,$ получаем уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p. \tag{8}$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением* плоскости, поскольку в качестве параметров, задающих плоскость, здесь использованы длина вектора нормали и его направляющие косинусы.

Нетрудно проверить, что вывод уравнения справедлив и для случая, когда плоскость проходит через начало координат; в этом случае $p = 0$ и векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны.

Расстояние от точки до плоскости

Нормальное уравнение плоскости, как оказывается, позволяет не только находить расстояние от произвольной точки пространства до этой плоскости, но и определять, по какую сторону от плоскости находится эта точка.

Будем называть части пространства, на которые его делит плоскость, *полупространствами*, и чтобы их разграничить, одно из них, например, то, в которое направлен определенный выше единичный вектор нормали $\vec{n}$, назовем *положительным*; второе полупространство назовем *отрицательным*.

Если плоскость проходит через начало координат, то положительное направление выберем произвольно.

Пусть задана произвольная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пространства. Назовем *отклонением* $\delta(M_0)$ этой точки от плоскости Π расстояние $\rho(M_0, \Pi)$ от этой точки до плоскости Π со знаком плюс или минус, в зависимости от того, в положительном полупространстве она лежит или в отрицательном. Таким образом, $|\delta(M_0)| = \rho(M_0, \Pi)$.

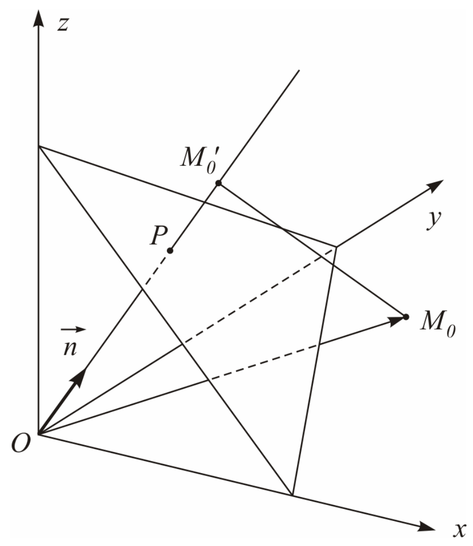


рис.2

Если точка M_0' - ортогональная проекция точки M_0 на прямую OP (рис.2), то, очевидно,

$$\delta(M_0) = M_0'P = OM_0' - OP = \overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{n} - p = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\delta(M_0) = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p. \qquad (9)$$

Для использования этих результатов необходимо уметь получать из общего уравнения плоскости нормальное.

Приведение уравнения плоскости общего вида к нормальному уравнению

Пусть задана плоскость своим общим уравнением (1). Если (9) - ее нормальное уравнение, то все коэффициенты обоих уравнений должны быть пропорциональны:

$$\mu a = \cos\alpha, \ \mu b = \cos\beta, \quad \mu c = \cos\gamma, \ \mu d = p. \qquad (10)$$

Используя соотношение (7), из первых трех равенств в (10) получаем $\mu^2(a^2+b^2+c^2)=1,$ или

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (11)$$

Если $p \neq 0$, то согласно последнему равенству в (10) в силу $p > 0$ знак здесь надо выбирать такой же, как и у правой части d.

Множитель (11) называют *нормирующим множителем* уравнения (1).

Учитывая (10), отклонение можно выразить через коэффициенты исходного уравнения (1):

$$\delta(M_0) = \frac{ax_0 + by_0 cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (12)$$

Обозначим через $L(x, y, z)$ функцию, равную разности левой и правой частей в (1): $L(x, y, z) = ax + by + cz - d$. Очевидно, для точек $M(x, y, z)$ плоскости Π справедливо $L(x, y, z) = 0$.

Оказывается, эта функция сохраняет знак для внутренних точек полупространства.

Следствие 2. Функция $L(x, y, z)$ принимает одинаковые знаки для точек, лежащих по одну сторону плоскости и разные знаки для точек, лежащих по разные стороны плоскости.

Справедливость этого утверждения вытекает из (12), поскольку нормирующий множитель не зависит от выбора точки $M(x_0, y_0, z_0)$.

Взаимное расположение плоскостей

Если плоскость (1) пересекает координатную плоскость, то прямую пересечения называют *следом* плоскости на соответствующей координатной плоскости.

Очевидно, прямые–следы плоскости (1) имеют на координатных плоскостях Oxy, Oyz, Oxz соответственно уравнения

$$ax + by = d, \qquad (13)$$

$$by + cz + d, \tag{14}$$

$$ax + cz = d. \tag{15}$$

Следы плоскости позволяют однозначно восстановить саму плоскость.

Утверждение 2. Две плоскости совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их следы на всех координатных плоскостях.

Это утверждение позволяет получить условие параллельности (и, в частности, совпадения) плоскостей.

Утверждение 3. Две плоскости, заданные соответственно уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{16}$$

параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при переменных линейной части пропорциональны:

$$a_2 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda b_1,\ c_2 = \lambda c_1 \tag{17}$$

и, в частности, совпадают тогда и только тогда, когда все соответствующие коэффициенты пропорциональны:

$$a_2 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda b_1,\ c_2 = \lambda c_1,\ d_2 = \lambda d_1. \tag{18}$$

Если среди коэффициентов уравнений (16) нет нулевых, то условия (17) и (18) можно переписать соответственно в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{19}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}. \tag{20}$$

В частности, прямые параллельны, но не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}. \qquad (21)$$

Используя условие параллельности плоскостей (17), легко получить

Утверждение 4. Уравнения параллельных плоскостей можно привести к виду с одинаковой линейной частью.

Таким образом, варьируя правую часть уравнения плоскости, получаем семейство параллельных друг другу плоскостей.

Заметим, что это утверждение справедливо в произвольной общей декартовой системе координат.

Пусть теперь задана прямоугольная система координат. Перпендикулярность плоскостей равносильна перпендикулярности их векторов–нормалей; поэтому справедливо

Утверждение 5. Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма попарных произведений соответствующих коэффициентов при переменных в их уравнениях равна нулю:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0. \qquad (22)$$

Пучок плоскостей

Назовем *пучком* плоскостей совокупность всех плоскостей, пересекающихся по одной и той же прямой.

Пусть плоскости (16) принадлежат пучку плоскостей. Тогда при любых коэффициентах α и β, не равных нулю одновременно, уравнение плоскости

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z) = \alpha d_1 + \beta d_2 \qquad (23)$$

является следствием уравнений этих плоскостей: если точка $M(x, y, z)$ удовлетворяет обоим уравнениям (16), то эта точка тем более удовлетворяет (23). Это означает, что плоскость (23) содержит точки пересечения обеих плоскостей, и тем самым, принадлежит пучку плоскостей.

Уравнение (23) можно переписать в виде

$$(\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y + (\alpha c_1 + \beta c_2)z = \alpha d_1 + \beta d_2. \qquad (24)$$

Очевидно, коэффициенты этого уравнения не могут одновременно равняться нулю, т.к. в противном случае линейная комбинация $\alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$ векторов–нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей дает нулевой вектор, что означает их коллинеарность, а значит, и параллельность плоскостей.

Вместе с тем, уравнение любой плоскости пучка плоскостей можно представить в виде (24) при некоторых α и β. Поэтому справедливо

Утверждение 6. Плоскость (1) принадлежит пучку прямых, определяемых плоскостями (16), тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$a = \alpha a_1 + \beta a_2,\ b = \alpha b_1 + \beta b_2,\ c = \alpha c_1 + \beta c_2,\ d = \alpha d_1 + \beta d_2 \qquad (25)$$

при некоторых α и β, не равных одновременно нулю.

Заметим, что условие (25) равносильно тому, что вектор нормали (1) является линейной комбинацией векторов нормалей $\vec{n}_1,\ \vec{n}_2$ плоскостей (16):

$$\vec{n} = \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2. \qquad (26)$$

Угол между двумя плоскостями

Углом между плоскостями (16) называется угол φ между их векторами нормалей $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^{\ 2} + b_1^{\ 2} + c_1^{\ 2}}\sqrt{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2} + c_2^{\ 2}}}. \qquad (27)$$

Различные виды уравнений прямой

Всякий ненулевой вектор, лежащий на прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

1. Прямая как пересечение двух плоскостей

Пусть в общей декартовой системе координат заданы две плоскости уравнениями (16). Если они пересекаются, то справедливо условие:

хотя бы один из определителей

$$|A_{xy}|, |A_{yz}|, |A_{xz}| \qquad (28)$$

не равен нулю, где

$$|A_{xy}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ |A_{yz}| = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ |A_{zx}| = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Система уравнений (16) однозначно определяет в этом случае прямую пересечения плоскостей.

Заметим, что выбор плоскостей для определения этой прямой неоднозначен. Вместо (16) можно взять любые две плоскости из соответствующего пучка прямых, т.е. любые две различных линейных комбинации этих уравнений.

2. Параметрическое уравнение прямой

Пусть в общей декартовой системе координат $Oxyz$ задана прямая l, и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ является направляющим вектором этой прямой.

Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - некоторая точка прямой l, то для любой точки $M(x, y, z)$ этой прямой вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a},$ что означает справедливость равенства

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\vec{a}, \tag{30}$$

где t - некоторое действительное число.

Мы получили так называемое векторное *параметрическое уравнение* прямой l.

Переходя к соответствующим соотношениям для координат, получаем *параметрическое уравнение в координатной форме*:

$$x = x_0 + a_1 t,\ \ y = y_0 + a_2 t,\ \ z = z_0 + a_3 t. \tag{31}$$

3. Каноническое уравнение прямой

Если все координаты вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ненулевые, то соотношение (31) можно записать в виде равенств

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, \tag{32}$$

которые называются *каноническим* уравнением прямой.

Условие (32) содержит три равенства, но всякое равенство в нем является следствием двух остальных.

Если одна из координат вектора $\vec{a}$ равна нулю, то в системе уравнений (32) остается одно уравнение, связывающее две координаты, к которому надо добавить условие постоянства третьей координаты, вытекающее из (31).

В случае равенства нулю одновременно двух координат направляющего вектора прямая параллельна одной из осей координат и каноническое уравнение не может быть написано.

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть известно, что точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ принадлежат прямой, не параллельной осям координат.

Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$ можно считать направляющим вектором прямой, и, используя каноническое уравнение, получаем уравнение прямой в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{33}$$

5. Связь между различными способами задания прямой

Если прямая задана уравнениями (16), в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ прямой можно взять векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ векторов-нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей:

$$\vec{a} = (|A_{yz}|, |A_{zx}|, |A_{xy}|). \tag{34}$$

Согласно (28), этот вектор является ненулевым в случае существования прямой пересечения плоскостей. Для получения параметрического или канонического уравнения прямой осталось найти одно частное решение системы уравнений (16), приравнивая одну из переменных некоторому значению (например, нулю) таким образом, чтобы ненулевой определитель в (34) являлся определителем получившейся системы двух уравнений.

Если все определители-координаты направляющего вектора (34) ненулевые, то выбирать в качестве нулевой можно любую координату.

Обратно, по каноническому или параметрическому уравнениям прямой нетрудно получить две плоскости (16), пересечением которых она является. Для этого достаточно найти два любых вектора, ортогональных направляющему вектору и затем взять в качестве векторов-нормалей плоскостей векторные произведения найденных векторов с направляющим вектором прямой.

Угол между прямыми

Углом между прямыми называется угол φ между их направляющими векторами $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Отсюда

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{35}$$

В частности, для углов α,β,γ между прямой и осями координат Ox, Oy, Oz имеем $\vec{b}=(1,0,0),\ \vec{b}=(0,1,0)$ или $\vec{b}=(0,0,1)$ соответственно, поэтому

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \tag{36}$$

Из (36) получаем выражение для угла между прямыми через направляющие косинусы прямых:

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2. \tag{37}$$

Угол между прямой и плоскостью

Если прямая и плоскость не являются перпендикулярными, то *углом между прямой и плоскостью* называется угол φ между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Если угол между направляющим вектором $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ прямой и вектором нормали $\vec{n}=(a,b,c)$ к плоскости равен α, то $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$ или $\varphi=\alpha-\frac{\pi}{2}$, в зависимости от того, является угол α острым или тупым, поэтому $\cos\varphi=\cos\alpha$ и

$$\cos\varphi=\frac{a_1a+a_2b+a_3c}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{38}$$

Взаимное расположение прямых и плоскостей

1. Прямая и плоскость.

Пусть в общей декартовой системе координат $Oxyz$ заданы уравнение плоскости

$$ax + by + cz = d \tag{39}$$

и параметрическое уравнение прямой

$$x = x_0 + a_1 t,\ \ y = y_0 + a_2 t,\ \ z = z_0 + a_3 t. \tag{40}$$

Подставляя выражения (40) в уравнение плоскости, получаем

$$a(x_0 + a_1 t) + b(y_0 + a_2 t) + c(z_0 + a_3 t) = d$$

или

$$\left(a_1 a + a_2 b + a_3 c\right) t = d - \left(a x_0 + b y_0 + c z_0\right). \tag{41}$$

Если

$$a_1 a + a_2 b + a_3 c \neq 0, \tag{42}$$

то можно найти значение параметра t, при котором некоторая точка прямой принадлежит плоскости, т.е. ее пересекает.

Это означает, что условие (42) является необходимым и достаточным условием пересечения прямой и плоскости.

Соответственно, условие

$$a_1 a + a_2 b + a_3 c = 0 \tag{43}$$

является необходимым и достаточным условием параллельности прямой (не принадлежащей плоскости) и плоскости, и, наконец, при

$$a_1 a + a_2 b + a_3 c = 0,\ \ a x_0 + b y_0 + c z_0 = d \tag{44}$$

прямая принадлежит плоскости.

2. Две прямые

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}, \qquad (45)$$

$$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}, \qquad (46)$$

где $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ - их направляющие векторы, и точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ лежат соответственно на первой и второй прямой.

Пусть сначала векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, т.е.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \qquad (47)$$

Тогда прямые l_1 и l_2 либо параллельны, либо совпадают, причем они совпадают, если вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. в случае

$$\frac{x_1-x_0}{a_1}=\frac{y_1-y_0}{a_2}=\frac{z_1-z_0}{a_3} \qquad (48)$$

и параллельны в противном случае, т.е. когда (48) не выполнено.

Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются коллинеарными. Тогда прямые l_1 и l_2 либо пересекаются, либо скрещиваются, в зависимости от того, выполняется ли условие

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (49)$$

Действительно, если прямые пересекаются, то векторы $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{M_0M}$ компланарны, и верно условие (49), и обратно, из условия (49) вытекает, что прямые пересекаются.

Условие (49) верно и в случае параллельности или совпадения прямых; в этом случае две последние строки определителя пропорциональны и он равен нулю. Поэтому прямые l_1 и l_2 скрещиваются в том, и только том случае, если

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (50)$$

Задачи и упражнения

Задача 1. Исследовать взаимное положение плоскостей $x+2y-z=2,\ -x+y-3z=6.$ В случае их пересечения найти прямую пересечения.

Решение. Плоскости не являются параллельными, поскольку, например**,** $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{-1}\neq\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{1}.$ Найдем прямую их пересечения.

Рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x+2y=\ z+2 \\ -x+\ y=3z+6 \end{cases},$$

которая содержит в левой части те переменные уравнений плоскостей, коэффициенты при которых, как мы показали выше, не пропорциональны, а в правую часть перенесена оставшаяся переменная $z,$ которую пока считаем фиксированной. Решая эту систему, получим $x=-\frac{5(z+2)}{3},\ y=\frac{4(z+2)}{3}.$

Если теперь обозначить $\frac{z+2}{3}=t,$ то параметрическое уравнение прямой пересечения приобретает вид

$$x=-5t,\ \ y=4t,\ \ z=3t-2.$$

Задача 2. Исследовать взаимное положение прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$ и плоскости $x+3y-2z=6.$

Решение. Прямая не параллельна плоскости, поскольку направляющий вектор прямой $\vec{a}=(2,3,-1)$ не ортогонален вектору нормали $\vec{n}=(1,3,-2)$ плоскости в силу $\vec{a}\,\vec{n}=13\neq 0.$

Следовательно, прямая пересекает плоскость в некоторой точке $M_0(x_0,y_0,z_0).$ Переходя к параметрическому уравнению прямой, получаем $\frac{x_0+1}{2}=\frac{y_0+2}{3}=\frac{z_0}{-1}=t_0$ и $x_0=-1+2t_0,\ y_0=-2+3t_0,\ z_0=-t_0$. Подставляя координаты этой точки прямой в уравнение плоскости, получаем $6=13t_0-7,\ t_0=1,$ и точка пересечения найдена: $M_0(1,1,-1).$

Задача 3. Исследовать взаимное положение прямых

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{4},\ \ \frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{\frac{1}{2}}=\frac{z+2}{2}.$$

Решение. Прямые не являются параллельными, поскольку, например, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{-1}\neq\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{\frac{1}{2}}.$ Далее, поскольку определитель (50), как нетрудно проверить, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

то прямые не являются скрещивающимися, т.е. пересекаются в некоторой точке $M_0(x_0,y_0,z_0).$ Переходя к параметрическим уравнениям прямых, получаем

$$x=-1+2t,\quad y=-2t,\ z=-2+4t,$$

и, соответственно,

$$x=3-t',\quad y=-1+\frac{1}{2}t',\ z=-2+2t'.$$

Для определения точки M_0 возьмем, например, уравнения, соответствующие первой и последней координатам точки:

$$-1+2t=3-t',\ -2+4t=-2+2t'.$$

Отсюда $t'==2,\ t=1$, и точка M_0 найдена: $M_0(1,-1,2)$.

Задача 4. Доказать, что точки $A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2),\ C(x_3,y_3,z_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (51)$$

Решение. Точки A,B,C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$ Приравнивая координаты этого вектора нулю, получаем требуемые равенства.

Задача 5. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ и $\frac{x-x_2}{a_1}=\frac{y-y_2}{a_2}=\frac{z-z_2}{a_3}$.

Решение. Пусть PQ - общий перпендикуляр к прямым (рис.3), длина которого ρ равна искомому расстоянию между прямыми: $PQ=\rho$.

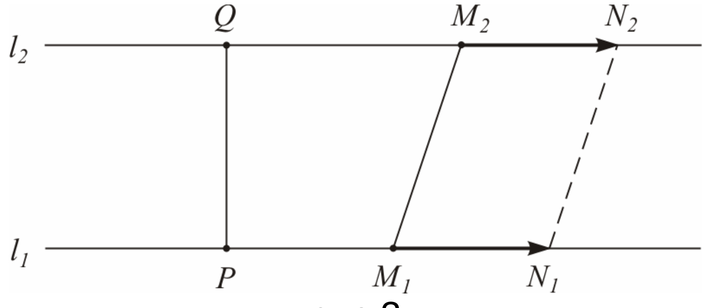


рис.3

Вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ - общий направляющий вектор прямых, точки $M_1(z_1,y_1,z_1)$ и $M_2(z_2,y_2,z_2)$ лежат на прямых l_1 и l_2 соответственно. Отложим на прямых l_1 и l_2 от точек M_1 и M_2 вектор $\vec{a}$, получим точки N_1 и N_2. Площадь параллелограмма $M_1N_1N_2M_2$ равна, с одной стороны, $PQ\cdot M_1N_1$, с другой стороны она равна $|\overrightarrow{M_1N_1}\times\overrightarrow{M_1M_2}|$. Отсюда искомое расстояние равно $\rho=\dfrac{|\overrightarrow{M_1N_1}\times\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{a}|}$. Обозначая

$$D_{yz}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix},\ D_{zx}=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ z_2-z_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix},\ D_{xy}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}, \quad (52)$$

окончательно получаем

$$\rho=\sqrt{\frac{D_{yz}{}^2+D_{zx}{}^2+D_{xy}{}^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \quad (53)$$

Задача 6. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$\pi_1:\ ax+by+cz=d_1,\ \pi_2:\ ax+by+cz=d_2. \quad (54)$$

Решение. Хотя бы один из коэффициентов линейной части уравнения не равен нулю, пусть, например, $a\neq 0$. Тогда точка $M_0\left(\dfrac{d_1}{a},0,0\right)$ принадлежит плоскости π_1 и расстояние между плоскостями равно $\rho=\rho(M_0,\pi_2)=\dfrac{\left|a\dfrac{d_1}{a}-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Таким образом, расстояние между параллельными плоскостями равно

$$\rho = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Задача 7. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}, \quad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}.$$

Решение.

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_1} = 0, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{MM_2} = 0, \tag{56}$$

где $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ - их общий вектор нормали, $M(x, y, z)$- произвольная точка плоскости.

Приводя уравнение плоскостей (56) к виду (54), получаем

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM_1}, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM_2}$$

и, согласно (55), искомое расстояние равно

$$\rho = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM_1} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM_2}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overline{M_1M_2}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|(a \times b) \cdot \overline{M_1M_2}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \overline{M_1M_2}\right|}{|\vec{n}|}.$$

Если обозначить

$$D = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

то, окончательно

$$\rho = \frac{|D|}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}} \tag{59}$$

Полученное соотношение имеет простую геометрическую интерпретацию (рис 4).

Числитель выражения (58) равен объему параллелепипеда, построенного на векторах, а знаменатель – его площади основания; поэтому их отношение ρ равно высоте параллелепипеда, т.е. расстоянию между прямыми.

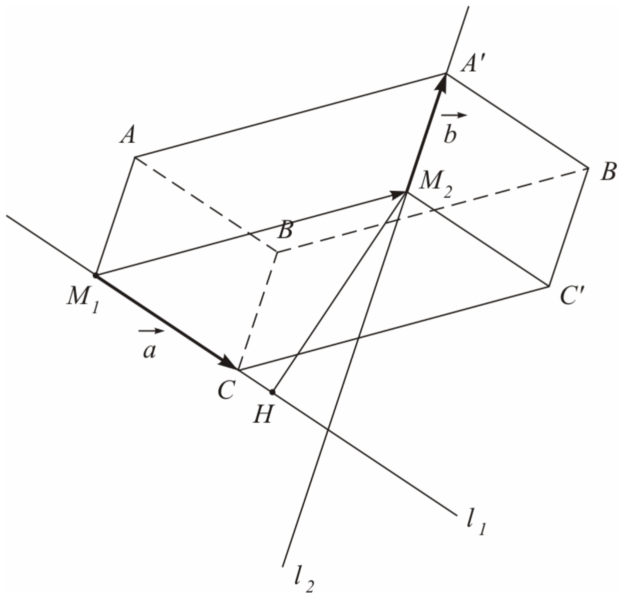


рис.4

Задача 8. Написать уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}, \quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}.$$

Решение. Очевидно, искомая прямая является пересечением двух плоскостей, каждая из которых содержит общий перпендикуляр к прямым и одну из прямых. Поскольку вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ направлен вдоль общего перпендикуляра, эти плоскости определяются этим вектором и одним из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому, если $M(x,y,z)$ - произвольная точка искомой прямой, то векторы $\overrightarrow{M_1M},\ \overrightarrow{M_2M}$ принадлежат соответственно первой и второй плоскостям, т.е. векторы $\overrightarrow{M_1M},\ \vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}$ и $\overrightarrow{M_2M},\ \vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}$ компланарны. Отсюда уравнения этих плоскостей $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,\ \overrightarrow{M_2M}\cdot\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0.$ Используя обозначения (52), получаем уравнение общего перпендикуляра

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (60)$$

Задача 9. Найти проекцию точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямую $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{a_2}=\dfrac{z-z_1}{a_3}.$

Решение. Пусть $M_0'(x, y, z)$ - искомая проекция. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M_0'}$ и $\vec{a}$ ортогональны, т.е. справедливо равенство

$$a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)=0. \qquad (61)$$

Перейдем к параметрическому уравнению прямой, тогда

$$x=x_1+a_1t_0,\ \ y=y_1+a_2t_0,\ \ z=z_1+a_3t_0. \qquad (62)$$

Подставляя координаты точки-проекции из(62) в (61), получаем

$$a_1(x-x_0+a_1t_0)+a_2(y-y_0+a_2t_0)+a_3(z-z_0+a_3t_0)=0,$$
$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)t_0=a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0).$$

Отсюда

$$t_0=\frac{a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \qquad (63)$$

Итак, проекция имеет координаты

$$x=x_1+a_1t_0,\ \ y=y_1+a_2t_0,\ \ z=z_1+a_3t_0, \qquad (64)$$

где t_0 определено в (63).

Задача 10. Написать уравнение перпендикуляра из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямую $\dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{a_2} = \dfrac{z-z_1}{a_3}$.

Решение. Искомый перпендикуляр лежит в двух плоскостях: плоскости векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{a},$ и плоскости, ортогональной вектору $\vec{a}$, проходящей через точку M_0. Поэтому, если точка $M(x, y, z)$ - произвольная точка перпендикуляра, то $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{a} = 0,$ $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{a} = 0$, или, в координатной форме,

$$a_1(x-x_0) + a_2(y-y_0) + a_3(z-z_0) = 0, \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (65)$$

Задача 11. Найти проекцию точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость $\pi : ax + by + cz = d.$

Решение. Пусть $M_0'(x, y, z)$ - искомая проекция. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_0'}$ коллинеарен вектору $\vec{n}$ нормали к плоскости: $\overrightarrow{M_0M_0'} = t_0\vec{n}.$ Поскольку этот вектор равен разности радиус векторов конечной и начальной точек: $\overrightarrow{M_0M_1'} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0),$ то

$$x = x_0 + t_0a, \ \ y = y_0 + t_0b, \ \ z = z_0 + t_0c.$$

Точка–проекция M_0' принадлежит плоскости $\pi,$ поэтому

$$a(x_0 + t_0a) + b(y_0 + t_0b) + c(z_0 + t_0c) = d.$$

Отсюда находим

$$t_0 = \frac{a(x_0 + a) + b(y_0 + b) + c(z_0 + c)}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad (66)$$

и координаты проекции на плоскость равны

$$x = x_0 + t_0 a,\;\; y = y_0 + t_0 b,\;\; z = z_0 + t_0 c, \tag{67}$$

где t_0 определено в (66).

Задача 12. Найти точку, симметричную точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно прямой $l: \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2} = \dfrac{z - z_1}{a_3}$.

Решение. Пусть точка $M(x', y', z')$ симметрична точке M_0 (рис.5).

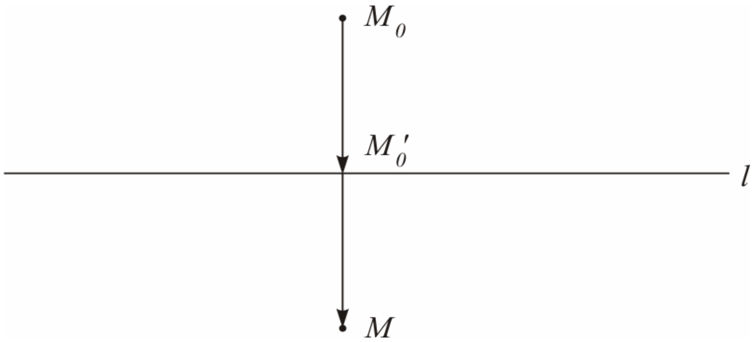


рис.5

Тогда $\overrightarrow{M_0 M} = 2\overrightarrow{M_0 M_0'}$, и, поскольку координаты точки M_0' - проекции точки M_0 на прямую найдены в (64), получаем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + 2\overrightarrow{M_0 M_0'} = \overrightarrow{OM_0} + 2(\overrightarrow{OM_0'} - \overrightarrow{OM_0}) = 2\overrightarrow{OM_0'} - \overrightarrow{OM_0}.$$

Отсюда

$$x' = 2x_1 + 2a_1 t_0 - x_0,\;\; y' = 2y_1 + 2a_2 t_0 - y_0,\;\; z' = 2z_1 + 2a_3 t_0 - z_0, \tag{68}$$

где t_0 найдено в (63).

Задача 13. Найти точку, симметричную точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно плоскости $\pi: \;\; ax + by + cz = d$.

Решение. Пусть $M(x', y', z')$ - точка, симметричная точке M_0, точка $M_0'(x, y, z)_0$ - проекция точки M_0 на плоскость.

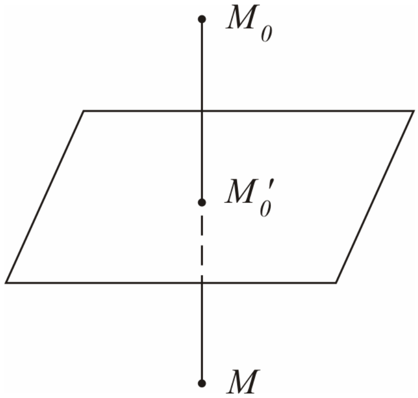


рис. 1

Тогда $\overrightarrow{M_0M} = 2\overrightarrow{M_0M_0'}$ и

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + 2\overrightarrow{M_0M_0'} = \overrightarrow{OM_0} + 2(\overrightarrow{OM_0'} - \overrightarrow{OM_0}) = 2\overrightarrow{OM_0'} - \overrightarrow{OM_0}$. Отсюда

$$x' = 2x - x_0,\ \ y' = 2y - y_0,\ \ z' = 2z_1 - z_0 \qquad (69)$$

где точка $M_0'(x, y, z)$ найдена в (64).

Упражнения

1. Написать параметрическое уравнение и уравнение общего вида плоскости, проходящей через точку A параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $A(-1,0,1),\ \vec{a} = (1,1,1),\ \vec{b}(-1,1,0)$; б) $A(1,1,1),\ \vec{a} = (2,-1,3),\ \vec{b}(3,0,-1)$;

в) $A(2,-4,3),\ \vec{a} = (0,1,-1),\ \vec{b}(-1,1,0)$.

2. Написать параметрическое уравнение и уравнение общего вида плоскости, проходящей через точки A и B параллельно вектору $\vec{a}$

а) $A(2,-1,1),\ B(-1,2,0),\ \vec{a} = (1,4,-1)$; б) $A(-1,3,2),\ B(2,-1,-1),\ \vec{a} = (-3,2,1)$;

в) $A(0,1,-3),\ B(-4,3,2),\ \vec{a} = (0,1,-1)$.

3. Написать параметрическое уравнение и уравнение общего вида плоскости, проходящей через точку A и одну из осей координат

а) $A(1,1,1),$ ось Ox; б) $A(-4,0,1),$ ось Oy;

в) $A(-3,7,4),$ ось Oz.

4. Написать уравнение плоскости общего вида, проходящей через точки A, B, C

а) $A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,1)$; б) $A(1,-1,0),\ B(0,1,-1),\ C(-1,0,1)$;

в) $A(1,1,-1),\ B(-1,1,1),\ C(1,-1,1)$; г) $A(1,1,0),\ B(0,1,1),\ C(1,0,1)$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A ортогонально отрезку BC

а) $A(-1,4,1),\ B(2,0,2),\ C(-3,1,-1)$; б) $A(3,-1,-1),\ B(-2,1,0),\ C(3,-1,2)$;

в) $A(2,0,-2),\ B(3,-4,-1),\ C(-1,3,3)$.

6. Написать уравнения плоскостей в отрезках по их параметрическим уравнениям

а) $x=u-v+1,\ y=2u+v,\ z=-u+2v-1$;

б) $x=3u,\ y=4u-v+1,\ z=-u+v-3$;

в) $x=u-2v-2,\ y=3u+v-1,\ z=2u+4v$.

7. Исследовать взаимное положение плоскостей. В случае их пересечения написать параметрическое уравнение прямой пересечения

а) $x+3y-z=-2,\ -2x-y+2z=1$; б) $-4x-y+3z=1,\ 5x+3y-z=-6$;

в) $-3x-2y+z=0,\ 2x-y=1$.

8. Найти расстояние от точки *A* до плоскости π

а) $A(-4,1,3),\ \pi:\ 2x-2y+z=4;$ б) $A(1,2,5),\ \pi:\ x+y-z=1$;

в) $A(1,0,-2),\ \pi:\ 3x+4z=5$.

9. Найти расстояние от начала координат до плоскости треугольника ABC

а) $A(-1,1,0),\ B(0,-1,1),\ C(1,0,-1)$; б) $A(3,-1,2),\ B(2,0,-3),\ C(1,1,-1)$.

10. Найти расстояние между параллельными плоскостями

а) $x-2y+z=2,\ x-2y+z=8$; б) $-3x+y-2z=-1,\ -3x+y-2z=6$;

в) $2x-2y-z=2,\ 2x-2y-z=-1$.

11. Найти ширину полосы между параллельными прямыми l_1 и l_2:

а) $l_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}, \quad l_2: \dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-8}{-4}$;

б) $l_1: \dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+4}{4}, \quad l_2: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.

12. Написать уравнение плоскости, содержащей точку A и ортогональной отрезку BC

а) $A(4,3,-2),\ B(2,0,0),\ C(-1,3,1)$; б) $A(2,-2,0),\ B(3,-1,1),\ C(2,1,4)$.

13. Найти расстояние от точки A до плоскости, содержащей точки B,C,D

а) $A(2,3,-4),\ B(1,3,1),\ C(-1,-1,4),\ D(0,2,3)$;

б) $A(-1,4,1),\ B(0,3,3),\ C(2,1,6),\ D(1,4,5)$.

14. Написать параметрическое и каноническое уравнения прямой, проходящей через точки A и B

а) $A(1,0,1),\ B(-1,1,0)$; б) $A(2,3,-1),\ B(-1,3,2)$;

в) $A(4,-1,2),\ B(-2,1,3)$; г) $A(0,-4,2),\ B(2,2,-4)$;

15. Проверить, образуют ли точки A,B,C треугольник

а) $A(4,-2,-2),\ B(-2,0,2),\ C(1,-1,0)$; б) $A(2,-1,-4),\ B(-2,0,2),\ C(1,-1,0)$;

в) $A(6,-8,4),\ B(-2,4,0),\ C(2,-2,2)$.

16. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой l

а) $A(1,-1,-1), \quad l: \ x+y+z=2, \ 2x-y-z=-2$;

б) $A(-4,3,3), \quad l: \ -3x+y-2z=-1, \ 2x-3y=4$;

17. Проверить, параллельны ли прямые l_1 и l_2

а) $l_1: \ x=3t+2, \ y=-t+1, \ z=2t-2, \qquad l_2: \ x=6t-1, \ y=-2t-2, \ z=4t+1$;

б) $l_1: \ x=4t-2, \ y=2t-1, \ z=-2t+1, \quad l_2: \ x=2t+1, \ y=t-1, \ z=-t-1$.

18. Задана прямая l. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной этой прямой и содержащей точку A. Найти расстояние от точки A до прямой l.

а) $l: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+2}{2}, \quad A(4,0,-2)$; б) $l: \dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{4}, \quad A(-1,7,4)$.

19. Исследовать взаимное положение прямых l_1 и l_2. Найти общую точку, если она существует; в противном случае найти расстояние между прямыми

а). $l_1: \ x=2t-1, \ y=t-2, \ z=-t+1, \quad l_2: \ x=t+1, \ y=t-1, \ z=-t$;

б) $l_1: \ x=t+2, \ y=-t-1, \ z=2t-1, \quad l_2: \ x+y+z=1, \ x-z+1=0$;

в) $l_1: \ 2x-y-z=1, -x+2y=0, \qquad l_2: \ 3x-y-z=1, \ x-2y+3z=-1$;

г) $l_1: \ x=t, \ y=-t, \ z=t, \qquad l_2: \ x=2t-2, \ y=t+2, \ z=3t-2$.

20. Исследовать взаимное положение прямой l и плоскости π

а) $l: \ x=t+1, \ y=-2t-1, \ z=t, \qquad \pi: \ x+y+z=0$;

б) $l: \ x=2t-1, \ y=t-1, \ z=-t-1, \qquad \pi: \ x-y+z=1$;

в) $l: \ x=-2t+2, \ y=2t-1, \ z=4t+3, \quad \pi: \ x-y+2z=1$;

г) $l: \ -x+y+z=0, \ 2x+y-z=2, \qquad \pi: \ 4x-2y+6z=1$;

д) $l:\ 2x-y+4z=7,\ -3x-y-z=4,\qquad \pi:\ x-y+z=4;$

е) $l:\ x-2y+2z=1,\ x-3y+2z=-2,\qquad \pi:\ x-y+3z=0.$

21. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l

а) $A(-1,1,1),\qquad l:\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$; б) $A(1,-3,-2),\quad l:\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.

22. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно плоскости, содержащей прямые l_1 и l_2

а) $A(1,2,1),\quad l_1:\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+1}{1},\quad l_2:\ \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-5}{-6}=\dfrac{z-2}{2};$

б) $A(7,-1,4),\quad l_1:\ \dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-6}{3},\quad l_2:\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-9}{1}.$

23. Написать уравнение плоскости, ортогональной полосе между двумя параллельными прямыми l_1 и l_2, проходящей через срединную прямую этой полосы

а) $l_1:\ x=t+1,\ y=2t-2,\ z=-t+3,\qquad l_2:\ x=2t-1,\ y=4t+2,\ z=-2t-3$;

б) $l_1:\ x=2t-1,\ y=-3t+3,\ z=t-4,\qquad l_2:\ x=6t+3,\ y=-9t,\ z=3t-3.$

24. Написать уравнение прямой, перпендикулярной параллельным прямым l_1 и l_2 и проходящей через начало координат

а) $l_1:\ x=-t+1,\ y=t-2,\ z=-t-1,\qquad l_2:\ x=-2t-4,\ y=2t+4,\ z=-2t;$

б) $l_1:\ x=3t-2,\ y=6t+3,\ z=-t,\qquad l_2:\ x=3t-3,\ y=6t-1,\ z=-t+1.$

25. Написать уравнение высоты тетраэдра, отсекаемого плоскостью π от первого координатного угла

а) $\pi:\ x+y+z=1$;   б) $\pi:\ 2x+y+z=2$.

26. Написать уравнение перпендикуляра из точки A к плоскости π.

а) $A(-4,1,0),\ \pi: 3x-y+2z=6;$ б) $A(3,-1,2),\ \pi: x-2y+4z=8.$

27. Что можно сказать о положении плоскости

$$\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)=0,$$

где $f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)=0$ - уравнения плоскостей,

$\alpha\ge 0,\ \beta\ge 0,\ \alpha+\beta=1,$ в случае

а) параллельности плоскостей $f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)=0$;

б) пересечения плоскостей $f(x,y,z)=0,\ g(x,y,z)=0$.

Тема 9. Плоскости и прямые в трехмерном пространстве. Уравнение плоскости. Способы задания прямой в трехмерном пространстве. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Различные виды уравнений плоскости

1. Уравнение плоскости общего вида

Уравнение вида

$$ax + by + cz = d \qquad (1)$$

является линейным относительно переменных $x, y, z.$ Линейную комбинацию переменных $ax + by + cz$ будем называть *линейной частью* уравнения. Естественно считать, что среди его коэффициентов a, b, c при линейной части есть ненулевые.

Утверждение 1.

(1) Всякая плоскость трехмерного пространства может быть задана линейным уравнением.

(2) Всякое линейное уравнение задает некоторую плоскость.

Действительно, пусть Π - некоторая плоскость. Выберем некоторую прямоугольную систему координат $Oxyz$ и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - некоторая точка плоскости. Выберем любой вектор $\overrightarrow{M_0N} = (a, b, c),$ перпендикулярный плоскости. Тогда точка $M(x, y, z)$ только в том случае принадлежит плоскости Π, если вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_0N}$.

Вспоминая условие ортогональности векторов, получаем

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \qquad (2)$$

Полагая $d=ax_0+by_0+cz_0$, получаем уравнение (1). Итак, плоскость в прямоугольной декартовой системе координат задается линейным уравнением. В силу линейности преобразования переменных при переходе к иной системе координат это справедливо и для произвольной общей системы координат.

Следствие 1. Вектор коэффициентов при переменных в уравнении плоскости (вектор нормали) $\vec{n}=(a,b,c)$ перпендикулярен плоскости (1).

Уравнение (1) называется *уравнением плоскости общего вида*, или, кратко, *общим уравнением* плоскости.

2. Уравнение плоскости в отрезках.

Если в (1) все коэффициенты линейной части ненулевые, то его можно привести к виду

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,$$

где $p=\dfrac{d}{a},\ q=\dfrac{d}{b},\ z=\dfrac{d}{c}.$

Уравнение (3) называется *уравнением плоскости в отрезках*. Как и в случае одноименного уравнения прямой, своим названием оно обязано тому факту, что абсолютные величины чисел $|p|,|q|,\ |r|$ в знаменателях определяют величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях Ox,Oy,Oz соответственно.

3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум векторам

Пусть задана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и векторы $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$. Эти векторы, отложенные от точки M_0, определяют плоскость Π. Поскольку для произвольной точки $M(x, y, z)$ этой плоскости векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны, то равенство

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

дает уравнение плоскости Π.

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданных точки

Пусть заданы три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Плоскость Π, определяемая ими, может быть задана также точкой A и векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Поэтому уравнение этой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

5. Нормальное уравнение плоскости

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат задана плоскость Π, не проходящая через начало координат. Опустим из начала координат перпендикуляр OP на плоскость Π. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор нормали к плоскости (рис.1).

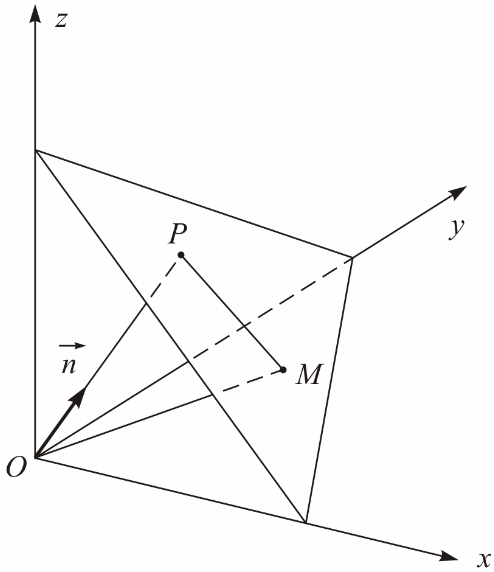


рис.1

Если α, β, γ - углы, образуемые вектором нормали $\vec{n}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно, то

$$\vec{n} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \qquad (6)$$

Поэтому его координаты называют *направляющими косинусами*. Поскольку вектор единичный, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (7)$$

Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка плоскости Π. Тогда

$$OP = \left|\vec{\pi}_{\vec{n}}(\overrightarrow{OM})\right| = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Обозначая величину перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость Π, через p, получаем уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p. \qquad (8)$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением* плоскости, поскольку в качестве параметров, задающих плоскость, здесь использованы длина вектора нормали и его направляющие косинусы.

Нетрудно проверить, что вывод уравнения справедлив и для случая, когда плоскость проходит через начало координат; в этом случае $p=0$ и векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны.

Расстояние от точки до плоскости

Нормальное уравнение плоскости, как оказывается, позволяет не только находить расстояние от произвольной точки пространства до этой плоскости, но и определять, по какую сторону от плоскости находится эта точка.

Будем называть части пространства, на которые его делит плоскость, *полупространствами*, и чтобы их разграничить, одно из них, например, то, в которое направлен определенный выше единичный вектор нормали $\vec{n}$, назовем *положительным*; второе полупространство назовем *отрицательным*.

Если плоскость проходит через начало координат, то положительное направление выберем произвольно.

Пусть задана произвольная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пространства. Назовем *отклонением* $\delta(M_0)$ этой точки от плоскости Π расстояние $\rho(M_0, \Pi)$ от этой точки до плоскости Π со знаком плюс или минус, в зависимости от того, в положительном полупространстве она лежит или в отрицательном. Таким образом, $|\delta(M_0)| = \rho(M_0, \Pi)$.

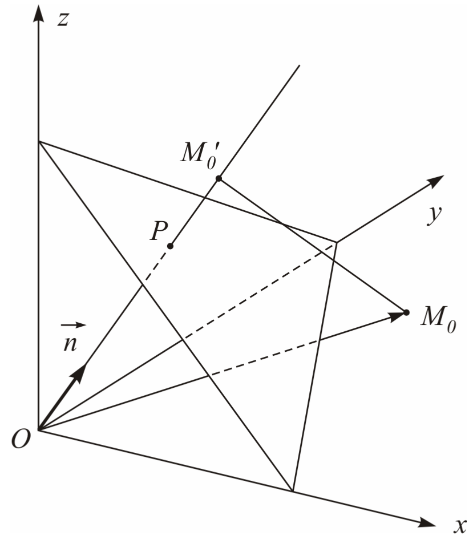


рис.2

Если точка M_0' - ортогональная проекция точки M_0 на прямую OP (рис.2), то, очевидно,

$$\delta(M_0) = M_0'P = OM_0' - OP = \overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{n} - p = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\delta(M_0) = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p. \tag{9}$$

Для использования этих результатов необходимо уметь получать из общего уравнения плоскости нормальное.

Приведение уравнения плоскости общего вида к нормальному уравнению

Пусть задана плоскость своим общим уравнением (1). Если (9) - ее нормальное уравнение, то все коэффициенты обоих уравнений должны быть пропорциональны:

$$\mu a = \cos\alpha, \ \mu b = \cos\beta, \quad \mu c = \cos\gamma, \ \mu d = p. \tag{10}$$

Используя соотношение (7), из первых трех равенств в (10) получаем $\mu^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1$, или

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{11}$$

Если $p \neq 0,$ то согласно последнему равенству в (10) в силу $p > 0$ знак здесь надо выбирать такой же, как и у правой части $d.$

Множитель (11) называют *нормирующим множителем* уравнения (1).

Учитывая (10), отклонение можно выразить через коэффициенты исходного уравнения (1):

$$\delta(M_0) = \frac{ax_0 + by_0cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (12)$$

Обозначим через $L(x, y, z)$ функцию, равную разности левой и правой частей в (1): $L(x, y, z) = ax + by + cz - d.$ Очевидно, для точек $M(x, y, z)$ плоскости Π справедливо $L(x, y, z) = 0.$

Оказывается, эта функция сохраняет знак для внутренних точек полупространства.

Следствие 2. Функция $L(x, y, z)$ принимает одинаковые знаки для точек, лежащих по одну сторону плоскости и разные знаки для точек, лежащих по разные стороны плоскости.

Справедливость этого утверждения вытекает из (12), поскольку нормирующий множитель не зависит от выбора точки $M(x_0, y_0, z_0).$

Взаимное расположение плоскостей

Если плоскость (1) пересекает координатную плоскость, то прямую пересечения называют *следом* плоскости на соответствующей координатной плоскости.

Очевидно, прямые–следы плоскости (1) имеют на координатных плоскостях $Oxy,\ Oyz,\ Oxz$ соответственно уравнения

$$ax + by = d, \qquad (13)$$

$$by + cz + d, \tag{14}$$

$$ax + cz = d. \tag{15}$$

Следы плоскости позволяют однозначно восстановить саму плоскость.

Утверждение 2. Две плоскости совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их следы на всех координатных плоскостях.

Это утверждение позволяет получить условие параллельности (и, в частности, совпадения) плоскостей.

Утверждение 3. Две плоскости, заданные соответственно уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{16}$$

параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при переменных линейной части пропорциональны:

$$a_2 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda b_1,\ c_2 = \lambda c_1 \tag{17}$$

и, в частности, совпадают тогда и только тогда, когда все соответствующие коэффициенты пропорциональны:

$$a_2 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda b_1,\ c_2 = \lambda c_1,\ d_2 = \lambda d_1. \tag{18}$$

Если среди коэффициентов уравнений (16) нет нулевых, то условия (17) и (18) можно переписать соответственно в виде

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{19}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}. \tag{20}$$

В частности, прямые параллельны, но не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}. \qquad (21)$$

Используя условие параллельности плоскостей (17), легко получить

Утверждение 4. Уравнения параллельных плоскостей можно привести к виду с одинаковой линейной частью.

Таким образом, варьируя правую часть уравнения плоскости, получаем семейство параллельных друг другу плоскостей.

Заметим, что это утверждение справедливо в произвольной общей декартовой системе координат.

Пусть теперь задана прямоугольная система координат. Перпендикулярность плоскостей равносильна перпендикулярности их векторов–нормалей; поэтому справедливо

Утверждение 5. Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма попарных произведений соответствующих коэффициентов при переменных в их уравнениях равна нулю:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0. \qquad (22)$$

Пучок плоскостей

Назовем *пучком* плоскостей совокупность всех плоскостей, пересекающихся по одной и той же прямой.

Пусть плоскости (16) принадлежат пучку плоскостей. Тогда при любых коэффициентах α и β, не равных нулю одновременно, уравнение плоскости

$$\alpha(a_1 x + b_1 y + c_1 z) + \beta(a_2 x + b_2 y + c_2 z) = \alpha d_1 + \beta d_2 \qquad (23)$$

является следствием уравнений этих плоскостей: если точка $M(x, y, z)$ удовлетворяет обоим уравнениям (16), то эта точка тем более удовлетворяет (23). Это означает, что плоскость (23) содержит точки пересечения обеих плоскостей, и тем самым, принадлежит пучку плоскостей.

Уравнение (23) можно переписать в виде

$$(\alpha a_1+\beta a_2)x+(\alpha b_1+\beta b_2)y+(\alpha c_1+\beta c_2)z=\alpha d_1+\beta d_2. \qquad (24)$$

Очевидно, коэффициенты этого уравнения не могут одновременно равняться нулю, т.к. в противном случае линейная комбинация $\alpha\vec{n}_1+\beta\vec{n}_2$ векторов–нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей дает нулевой вектор, что означает их коллинеарность, а значит, и параллельность плоскостей.

Вместе с тем, уравнение любой плоскости пучка плоскостей можно представить в виде (24) при некоторых α и β. Поэтому справедливо

Утверждение 6. Плоскость (1) принадлежит пучку прямых, определяемых плоскостями (16), тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$a=\alpha a_1+\beta a_2,\ b=\alpha b_1+\beta b_2,\ c=\alpha c_1+\beta c_2,\ d=\alpha d_1+\beta d_2 \qquad (25)$$

при некоторых α и β, не равных одновременно нулю.

Заметим, что условие (25) равносильно тому, что вектор нормали (1) является линейной комбинацией векторов нормалей $\vec{n}_1,\ \vec{n}_2$ плоскостей (16):

$$\vec{n}=\alpha\vec{n}_1+\beta\vec{n}_2. \qquad (26)$$

Угол между двумя плоскостями

Углом между плоскостями (16) называется угол φ между их векторами нормалей $\vec{n}_1=(a_1,b_1,c_1)$ и $\vec{n}_2=(a_2,b_2,c_2)$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \qquad (27)$$

Различные виды уравнений прямой

Всякий ненулевой вектор, лежащий на прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

1. Прямая как пересечение двух плоскостей

Пусть в общей декартовой системе координат заданы две плоскости уравнениями (16). Если они пересекаются, то справедливо условие:

хотя бы один из определителей

$$|A_{xy}|, |A_{yz}|, |A_{xz}| \qquad (28)$$

не равен нулю, где

$$|A_{xy}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ |A_{yz}| = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ |A_{zx}| = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (29)$$

Система уравнений (16) однозначно определяет в этом случае прямую пересечения плоскостей.

Заметим, что выбор плоскостей для определения этой прямой неоднозначен. Вместо (16) можно взять любые две плоскости из соответствующего пучка прямых, т.е. любые две различных линейных комбинации этих уравнений.

2. Параметрическое уравнение прямой

Пусть в общей декартовой системе координат $Oxyz$ задана прямая l, и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ является направляющим вектором этой прямой.

Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - некоторая точка прямой l, то для любой точки $M(x, y, z)$ этой прямой вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a},$ что означает справедливость равенства

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\vec{a}, \tag{30}$$

где t - некоторое действительное число.

Мы получили так называемое векторное *параметрическое уравнение* прямой l.

Переходя к соответствующим соотношениям для координат, получаем *параметрическое уравнение в координатной форме*:

$$x = x_0 + a_1 t,\ \ y = y_0 + a_2 t,\ \ z = z_0 + a_3 t. \tag{31}$$

3. Каноническое уравнение прямой

Если все координаты вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ненулевые, то соотношение (31) можно записать в виде равенств

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, \tag{32}$$

которые называются *каноническим* уравнением прямой.

Условие (32) содержит три равенства, но всякое равенство в нем является следствием двух остальных.

Если одна из координат вектора $\vec{a}$ равна нулю, то в системе уравнений (32) остается одно уравнение, связывающее две координаты, к которому надо добавить условие постоянства третьей координаты, вытекающее из (31).

В случае равенства нулю одновременно двух координат направляющего вектора прямая параллельна одной из осей координат и каноническое уравнение не может быть написано.

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть известно, что точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ принадлежат прямой, не параллельной осям координат.

Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$ можно считать направляющим вектором прямой, и, используя каноническое уравнение, получаем уравнение прямой в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{33}$$

5. Связь между различными способами задания прямой

Если прямая задана уравнениями (16), в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ прямой можно взять векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ векторов-нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей:

$$\vec{a} = (|\,A_{yz}\,|, |\,A_{zx}\,|, |\,A_{xy}\,|). \tag{34}$$

Согласно (28), этот вектор является ненулевым в случае существования прямой пересечения плоскостей. Для получения параметрического или канонического уравнения прямой осталось найти одно частное решение системы уравнений (16), приравнивая одну из переменных некоторому значению (например, нулю) таким образом, чтобы ненулевой определитель в (34) являлся определителем получившейся системы двух уравнений.

Если все определители-координаты направляющего вектора (34) ненулевые, то выбирать в качестве нулевой можно любую координату.

Обратно, по каноническому или параметрическому уравнениям прямой нетрудно получить две плоскости (16), пересечением которых она является. Для этого достаточно найти два любых вектора, ортогональных направляющему вектору и затем взять в качестве векторов-нормалей плоскостей векторные произведения найденных векторов с направляющим вектором прямой.

Угол между прямыми

Углом между прямыми называется угол φ между их направляющими векторами $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Отсюда

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}. \qquad (35)$$

В частности, для углов α,β,γ между прямой и осями координат Ox, Oy, Oz имеем $\vec{b}=(1,0,0),\ \vec{b}=(0,1,0)$ или $\vec{b}=(0,0,1)$ соответственно, поэтому

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}},\ \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}. \qquad (36)$$

Из (36) получаем выражение для угла между прямыми через направляющие косинусы прямых:

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2. \qquad (37)$$

Угол между прямой и плоскостью

Если прямая и плоскость не являются перпендикулярными, то *углом между прямой и плоскостью* называется угол φ между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.

Если угол между направляющим вектором $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ прямой и вектором нормали $\vec{n}=(a,b,c)$ к плоскости равен α, то $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$ или $\varphi=\alpha-\frac{\pi}{2}$, в зависимости от того, является угол α острым или тупым, поэтому $\cos\varphi=\cos\alpha$ и

$$\cos\varphi=\frac{a_1a+a_2b+a_3c}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (38)$$

Взаимное расположение прямых и плоскостей

1. Прямая и плоскость.

Пусть в общей декартовой системе координат $Oxyz$ заданы уравнение плоскости

$$ax+by+cz=d \tag{39}$$

и параметрическое уравнение прямой

$$x=x_0+a_1t,\ \ y=y_0+a_2t,\ \ z=z_0+a_3t. \tag{40}$$

Подставляя выражения (40) в уравнение плоскости, получаем

$$a(x_0+a_1t)+b(y_0+a_2t)+c(z_0+a_3t)=d$$

или

$$\left(a_1a+a_2b+a_3c\right)t=d-\left(ax_0+by_0+cz_0\right). \tag{41}$$

Если

$$a_1a+a_2b+a_3c\neq 0, \tag{42}$$

то можно найти значение параметра t, при котором некоторая точка прямой принадлежит плоскости, т.е. ее пересекает.

Это означает, что условие (42) является необходимым и достаточным условием пересечения прямой и плоскости.

Соответственно, условие

$$a_1a+a_2b+a_3c=0 \tag{43}$$

является необходимым и достаточным условием параллельности прямой (не принадлежащей плоскости) и плоскости, и, наконец, при

$$a_1a+a_2b+a_3c=0,\ \ ax_0+by_0+cz_0=d \tag{44}$$

прямая принадлежит плоскости.

2. Две прямые

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}, \qquad (45)$$

$$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}, \qquad (46)$$

где $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ - их направляющие векторы, и точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ лежат соответственно на первой и второй прямой.

Пусть сначала векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, т.е.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \qquad (47)$$

Тогда прямые l_1 и l_2 либо параллельны, либо совпадают, причем они совпадают, если вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ коллинеарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. в случае

$$\frac{x_1-x_0}{a_1}=\frac{y_1-y_0}{a_2}=\frac{z_1-z_0}{a_3} \qquad (48)$$

и параллельны в противном случае, т.е. когда (48) не выполнено.

Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются коллинеарными. Тогда прямые l_1 и l_2 либо пересекаются, либо скрещиваются, в зависимости от того, выполняется ли условие

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (49)$$

Действительно, если прямые пересекаются, то векторы $\vec{a},\vec{b},\overrightarrow{M_0M}$ компланарны, и верно условие (49), и обратно, из условия (49) вытекает, что прямые пересекаются.

Условие (49) верно и в случае параллельности или совпадения прямых; в этом случае две последние строки определителя пропорциональны и он равен нулю. Поэтому прямые l_1 и l_2 скрещиваются в том, и только том случае, если

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (50)$$

Задачи и упражнения

Задача 1. Исследовать взаимное положение плоскостей $x+2y-z=2,\ -x+y-3z=6.$ В случае их пересечения найти прямую пересечения.

Решение. Плоскости не являются параллельными, поскольку, например**,** $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{-1}\neq\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{1}.$ Найдем прямую их пересечения.

Рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x+2y= \ z+2 \\ -x+\ y=3z+6 \end{cases},$$

которая содержит в левой части те переменные уравнений плоскостей, коэффициенты при которых, как мы показали выше, не пропорциональны, а в правую часть перенесена оставшаяся переменная $z,$ которую пока считаем фиксированной. Решая эту систему, получим $x=-\frac{5(z+2)}{3},\ y=\frac{4(z+2)}{3}.$

Если теперь обозначить $\frac{z+2}{3}=t,$ то параметрическое уравнение прямой пересечения приобретает вид

$$x=-5t,\ \ y=4t,\ \ z=3t-2.$$

Задача 2. Исследовать взаимное положение прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$ и плоскости $x+3y-2z=6.$

Решение. Прямая не параллельна плоскости, поскольку направляющий вектор прямой $\vec{a}=(2,3,-1)$ не ортогонален вектору нормали $\vec{n}=(1,3,-2)$ плоскости в силу $\vec{a}\,\vec{n}=13\neq 0.$

Следовательно, прямая пересекает плоскость в некоторой точке $M_0(x_0,y_0,z_0).$ Переходя к параметрическому уравнению прямой, получаем $\frac{x_0+1}{2}=\frac{y_0+2}{3}=\frac{z_0}{-1}=t_0$ и $x_0=-1+2t_0,\ y_0=-2+3t_0,\ z_0=-t_0$. Подставляя координаты этой точки прямой в уравнение плоскости, получаем $6=13t_0-7,\ t_0=1,$ и точка пересечения найдена: $M_0(1,1,-1).$

Задача 3. Исследовать взаимное положение прямых

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{4},\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{\frac{1}{2}}=\frac{z+2}{2}.$$

Решение. Прямые не являются параллельными, поскольку, например, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{-1}\neq\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{\frac{1}{2}}.$ Далее, поскольку определитель (50), как нетрудно проверить, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}=0,$$

то прямые не являются скрещивающимися, т.е. пересекаются в некоторой точке $M_0(x_0,y_0,z_0).$ Переходя к параметрическим уравнениям прямых, получаем

$$x=-1+2t, \quad y=-2t, \; z=-2+4t,$$

и, соответственно,

$$x=3-t', \quad y=-1+\frac{1}{2}t', \; z=-2+2t'.$$

Для определения точки M_0 возьмем, например, уравнения, соответствующие первой и последней координатам точки:

$$-1+2t=3-t', \; -2+4t=-2+2t'.$$

Отсюда $t'==2, \; t=1$, и точка M_0 найдена: $M_0(1,-1,2)$.

Задача 4. Доказать, что точки $A(x_1,y_1,z_1),\; B(x_2,y_2,z_2),\; C(x_3,y_3,z_3)$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (51)$$

Решение. Точки A,B,C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}.$ Приравнивая координаты этого вектора нулю, получаем требуемые равенства.

Задача 5. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ и $\frac{x-x_2}{a_1}=\frac{y-y_2}{a_2}=\frac{z-z_2}{a_3}$.

Решение. Пусть PQ - общий перпендикуляр к прямым (рис.3), длина которого ρ равна искомому расстоянию между прямыми: $PQ=\rho$.

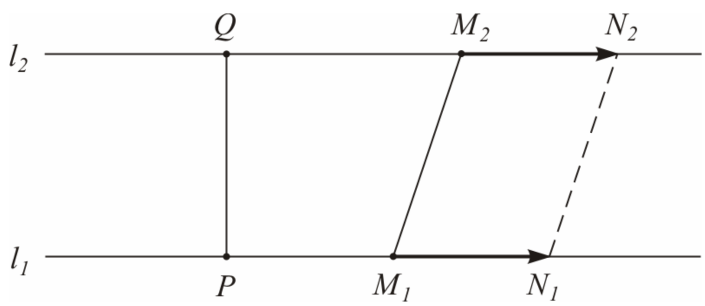


рис.3

Вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ - общий направляющий вектор прямых, точки $M_1(z_1,y_1,z_1)$ и $M_2(z_2,y_2,z_2)$ лежат на прямых l_1 и l_2 соответственно. Отложим на прямых l_1 и l_2 от точек M_1 и M_2 вектор $\vec{a}$, получим точки N_1 и N_2. Площадь параллелограмма $M_1N_1N_2M_2$ равна, с одной стороны, $PQ\cdot M_1N_1$, с другой стороны она равна $|\overrightarrow{M_1N_1}\times\overrightarrow{M_1M_2}|$. Отсюда искомое расстояние равно $\rho=\frac{|\overrightarrow{M_1N_1}\times\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{a}|}$. Обозначая

$$D_{yz}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix},\ D_{zx}=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ z_2-z_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix},\ D_{xy}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}, \qquad (52)$$

окончательно получаем

$$\rho=\sqrt{\frac{D_{yz}{}^2+D_{zx}{}^2+D_{xy}{}^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}. \qquad (53)$$

Задача 6. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$\pi_1:\ ax+by+cz=d_1,\ \pi_2:\ ax+by+cz=d_2. \qquad (54)$$

Решение. Хотя бы один из коэффициентов линейной части уравнения не равен нулю, пусть, например, $a\neq 0$. Тогда точка $M_0\left(\frac{d_1}{a},0,0\right)$ принадлежит плоскости π_1 и расстояние между плоскостями равно $\rho=\rho(M_0,\pi_2)=\frac{\left|a\frac{d_1}{a}-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Таким образом, расстояние между параллельными плоскостями равно

$$\rho = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Задача 7. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}, \quad \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}.$$

Решение.

Пусть $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{MM}_1 = 0, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{MM}_2 = 0, \tag{56}$$

где $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ - их общий вектор нормали, $M(x, y, z)$- произвольная точка плоскости.

Приводя уравнение плоскостей (56) к виду (54), получаем

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM}_1, \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM}_2$$

и, согласно (55), искомое расстояние равно

$$\rho = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM}_1 - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM}_2\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overline{M_1 M_2}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|(a \times b) \cdot \overline{M_1 M_2}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}\right|}{|\vec{n}|}.$$

Если обозначить

$$D = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

то, окончательно

$$\rho = \frac{|D|}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2}} \tag{59}$$

Полученное соотношение имеет простую геометрическую интерпретацию (рис 4).

Числитель выражения (58) равен объему параллелепипеда, построенного на векторах, а знаменатель – его площади основания; поэтому их отношение ρ равно высоте параллелепипеда, т.е. расстоянию между прямыми.

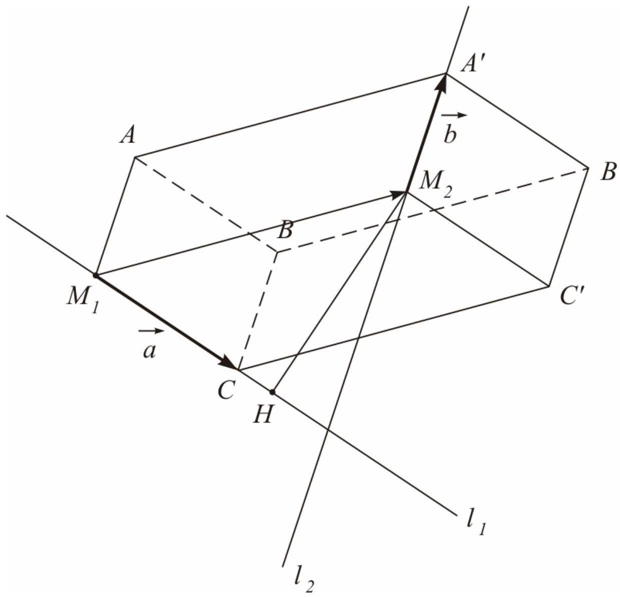


рис.4

Задача 8. Написать уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}, \quad \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}.$$

Решение. Очевидно, искомая прямая является пересечением двух плоскостей, каждая из которых содержит общий перпендикуляр к прямым и одну из прямых. Поскольку вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ направлен вдоль общего перпендикуляра, эти плоскости определяются этим вектором и одним из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому, если $M(x,y,z)$ - произвольная точка искомой прямой, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_2M}$ принадлежат соответственно первой и второй плоскостям, т.е. векторы $\overrightarrow{M_1M},\ \vec{a},\ \vec{a}\times\vec{b}$ и $\overrightarrow{M_2M},\ \vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}$ компланарны. Отсюда уравнения этих плоскостей $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,\ \overrightarrow{M_2M}\cdot\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0.$ Используя обозначения (52), получаем уравнение общего перпендикуляра

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (60)$$

Задача 9. Найти проекцию точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на прямую $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}.$

Решение. Пусть $M_0'(x,y,z)$ - искомая проекция. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M_0'}$ и $\vec{a}$ ортогональны, т.е. справедливо равенство

$$a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)=0. \qquad (61)$$

Перейдем к параметрическому уравнению прямой, тогда

$$x=x_1+a_1t_0,\ \ y=y_1+a_2t_0,\ \ z=z_1+a_3t_0. \qquad (62)$$

Подставляя координаты точки-проекции из(62) в (61), получаем

$$a_1(x-x_0+a_1t_0)+a_2(y-y_0+a_2t_0)+a_3(z-z_0+a_3t_0)=0,$$
$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)t_0=a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0).$$

Отсюда

$$t_0=\frac{a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)}{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \qquad (63)$$

Итак, проекция имеет координаты

$$x=x_1+a_1t_0,\ \ y=y_1+a_2t_0,\ \ z=z_1+a_3t_0, \qquad (64)$$

где t_0 определено в (63).

Задача 10. Написать уравнение перпендикуляра из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямую $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$.

Решение. Искомый перпендикуляр лежит в двух плоскостях: плоскости векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{a}$, и плоскости, ортогональной вектору $\vec{a}$, проходящей через точку M_0. Поэтому, если точка $M(x, y, z)$ - произвольная точка перпендикуляра, то $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{a} = 0$, $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{a} = 0$, или, в координатной форме,

$$a_1(x-x_0) + a_2(y-y_0) + a_3(z-z_0) = 0, \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (65)$$

Задача 11. Найти проекцию точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость $\pi: ax + by + cz = d$.

Решение. Пусть $M_0'(x, y, z)$ - искомая проекция. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_0'}$ коллинеарен вектору $\vec{n}$ нормали к плоскости: $\overrightarrow{M_0M_0'} = t_0\vec{n}$. Поскольку этот вектор равен разности радиус векторов конечной и начальной точек: $\overrightarrow{M_0M_1'} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, то

$$x = x_0 + t_0a, \;\; y = y_0 + t_0b, \;\; z = z_0 + t_0c.$$

Точка–проекция M_0' принадлежит плоскости π, поэтому

$$a(x_0 + t_0a) + b(y_0 + t_0b) + c(z_0 + t_0c) = d.$$

Отсюда находим

$$t_0 = \frac{a(x_0+a) + b(y_0+b) + c(z_0+c)}{a^2+b^2+c^2}, \quad (66)$$

и координаты проекции на плоскость равны

$$x = x_0 + t_0 a,\ \ y = y_0 + t_0 b,\ \ z = z_0 + t_0 c, \qquad (67)$$

где t_0 определено в (66).

Задача 12. Найти точку, симметричную точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно прямой $l:\ \dfrac{x - x_1}{a_1} = \dfrac{y - y_1}{a_2} = \dfrac{z - z_1}{a_3}$.

Решение. Пусть точка $M(x', y', z')$ симметрична точке M_0 (рис.5).

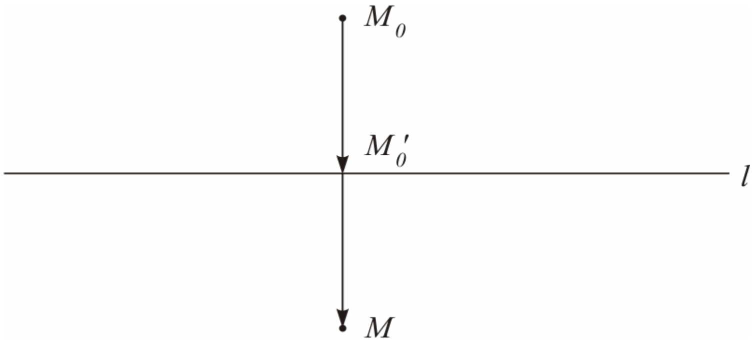


рис.5

Тогда $\overrightarrow{M_0M} = 2\overrightarrow{M_0M_0'}$, и, поскольку координаты точки M_0' - проекции точки M_0 на прямую найдены в (64), получаем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + 2\overrightarrow{M_0M_0'} = \overrightarrow{OM_0} + 2(\overrightarrow{OM_0'} - \overrightarrow{OM_0}) = 2\overrightarrow{OM_0'} - \overrightarrow{OM_0}.$$

Отсюда

$$x' = 2x_1 + 2a_1t_0 - x_0,\ \ y' = 2y_1 + 2a_2t_0 - y_0,\ \ z' = 2z_1 + 2a_3t_0 - z_0, \qquad (68)$$

где t_0 найдено в (63).

Задача 13. Найти точку, симметричную точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ относительно плоскости $\pi:\ \ ax + by + cz = d$.

Решение. Пусть $M(x', y', z')$ - точка, симметричная точке M_0, точка $M_0'(x, y, z)_0$ - проекция точки M_0 на плоскость.

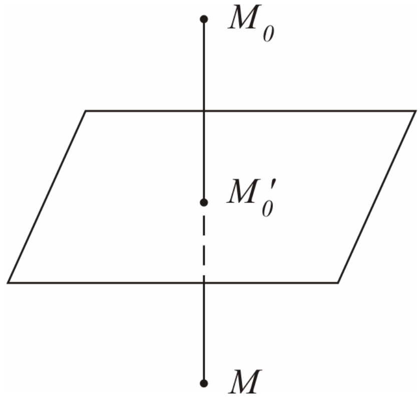


рис. 1

Тогда $\overrightarrow{M_0M} = 2\overrightarrow{M_0M_0'}$ и

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + 2\overrightarrow{M_0M_0'} = \overrightarrow{OM_0} + 2(\overrightarrow{OM_0'} - \overrightarrow{OM_0}) = 2\overrightarrow{OM_0'} - \overrightarrow{OM_0}$. Отсюда

$$x' = 2x - x_0,\ y' = 2y - y_0,\ z' = 2z_1 - z_0 \qquad (69)$$

где точка $M_0'(x, y, z)$ найдена в (64).

Упражнения

1. Написать параметрическое уравнение и уравнение общего вида плоскости, проходящей через точку A параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $A(-1,0,1),\ \vec{a} = (1,1,1),\ \vec{b}(-1,1,0)$; б) $A(1,1,1),\ \vec{a} = (2,-1,3),\ \vec{b}(3,0,-1)$;

в) $A(2,-4,3),\ \vec{a} = (0,1,-1),\ \vec{b}(-1,1,0)$.

2. Написать параметрическое уравнение и уравнение общего вида плоскости, проходящей через точки A и B параллельно вектору $\vec{a}$

а) $A(2,-1,1),\ B(-1,2,0),\ \vec{a} = (1,4,-1)$; б) $A(-1,3,2),\ B(2,-1,-1),\ \vec{a} = (-3,2,1)$;

в) $A(0,1,-3),\ B(-4,3,2),\ \vec{a} = (0,1,-1)$.

3. Написать параметрическое уравнение и уравнение общего вида плоскости, проходящей через точку A и одну из осей координат

а) $A(1,1,1)$, ось Ox; б) $A(-4,0,1)$, ось Oy;

в) $A(-3,7,4)$, ось Oz.

4. Написать уравнение плоскости общего вида, проходящей через точки A, B, C

а) $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$; б) $A(1,-1,0)$, $B(0,1,-1)$, $C(-1,0,1)$;

в) $A(1,1,-1)$, $B(-1,1,1)$, $C(1,-1,1)$; г) $A(1,1,0)$, $B(0,1,1)$, $C(1,0,1)$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A ортогонально отрезку BC

а) $A(-1,4,1)$, $B(2,0,2)$, $C(-3,1,-1)$; б) $A(3,-1,-1)$, $B(-2,1,0)$, $C(3,-1,2)$;

в) $A(2,0,-2)$, $B(3,-4,-1)$, $C(-1,3,3)$.

6. Написать уравнения плоскостей в отрезках по их параметрическим уравнениям

а) $x = u - v + 1,\ y = 2u + v,\ z = -u + 2v - 1$;

б) $x = 3u,\ y = 4u - v + 1,\ z = -u + v - 3$;

в) $x = u - 2v - 2,\ y = 3u + v - 1,\ z = 2u + 4v$.

7. Исследовать взаимное положение плоскостей. В случае их пересечения написать параметрическое уравнение прямой пересечения

а) $x + 3y - z = -2,\ -2x - y + 2z = 1$; б) $-4x - y + 3z = 1,\ 5x + 3y - z = -6$;

в) $-3x - 2y + z = 0,\ 2x - y = 1$.

8. Найти расстояние от точки *A* до плоскости π

а) $A(-4,1,3)$, $\pi:\ 2x - 2y + z = 4$; б) $A(1,2,5)$, $\pi:\ x + y - z = 1$;

в) $A(1,0,-2)$, $\pi:\ 3x + 4z = 5$.

9. Найти расстояние от начала координат до плоскости треугольника ABC

а) $A(-1,1,0),\ B(0,-1,1),\ C(1,0,-1)$; б) $A(3,-1,2),\ B(2,0,-3),\ C(1,1,-1)$.

10. Найти расстояние между параллельными плоскостями

а) $x-2y+z=2,\ \ x-2y+z=8$; б) $-3x+y-2z=-1,\ -3x+y-2z=6$;

в) $2x-2y-z=2,\ \ 2x-2y-z=-1$.

11. Найти ширину полосы между параллельными прямыми l_1 и l_2:

а) $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2},\quad l_2:\dfrac{x+4}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-8}{-4}$;

б) $l_1:\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z+4}{4},\quad l_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.

12. Написать уравнение плоскости, содержащей точку A и ортогональной отрезку BC

а) $A(4,3,-2),\ B(2,0,0),\ C(-1,3,1)$; б) $A(2,-2,0),\ B(3,-1,1),\ C(2,1,4)$.

13. Найти расстояние от точки A до плоскости, содержащей точки B,C,D

а) $A(2,3,-4),\ B(1,3,1),\ C(-1,-1,4),\ D(0,2,3)$;

б) $A(-1,4,1),\ B(0,3,3),\ C(2,1,6),\ D(1,4,5)$.

14. Написать параметрическое и каноническое уравнения прямой, проходящей через точки A и B

а) $A(1,0,1),\ B(-1,1,0)$; б) $A(2,3,-1),\ B(-1,3,2)$;

в) $A(4,-1,2),\ B(-2,1,3)$; г) $A(0,-4,2),\ B(2,2,-4)$;

15. Проверить, образуют ли точки A,B,C треугольник

а) $A(4,-2,-2),\ B(-2,0,2),\ C(1,-1,0)$; б) $A(2,-1,-4),\ B(-2,0,2),\ C(1,-1,0)$;

в) $A(6,-8,4),\ B(-2,4,0),\ C(2,-2,2)$.

16. Написать уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой l

а) $A(1,-1,-1),\quad l:\ x+y+z=2,\ 2x-y-z=-2$;

б) $A(-4,3,3),\quad l:\ -3x+y-2z=-1,\ 2x-3y=4$;

17. Проверить, параллельны ли прямые l_1 и l_2

а) $l_1:\ x=3t+2,\ y=-t+1,\ z=2t-2,\qquad l_2:\ x=6t-1,\ y=-2t-2,\ z=4t+1$;

б) $l_1:\ x=4t-2,\ y=2t-1,\ z=-2t+1,\quad l_2:\ x=2t+1,\ y=t-1,\ z=-t-1$.

18. Задана прямая l. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной этой прямой и содержащей точку A. Найти расстояние от точки A до прямой l.

а) $l: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+2}{2},\quad A(4,0,-2)$; б) $l: \dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{4},\quad A(-1,7,4)$.

19. Исследовать взаимное положение прямых l_1 и l_2. Найти общую точку, если она существует; в противном случае найти расстояние между прямыми

а). $l_1:\ x=2t-1,\ y=t-2,\ z=-t+1,\quad l_2:\ x=t+1,\ y=t-1,\ z=-t;$

б) $l_1:\ x=t+2,\ y=-t-1,\ z=2t-1,\quad l_2:\ x+y+z=1,\ x-z+1=0;$

в) $l_1:\ 2x-y-z=1,\ -x+2y=0,\qquad l_2:\ 3x-y-z=1,\ x-2y+3z=-1;$

г) $l_1:\ x=t,\ y=-t,\ z=t,\qquad l_2:\ x=2t-2,\ y=t+2,\ z=3t-2.$

20. Исследовать взаимное положение прямой l и плоскости π

а) $l:\ x=t+1,\ y=-2t-1,\ z=t,\qquad \pi:\ x+y+z=0;$

б) $l:\ x=2t-1,\ y=t-1,\ z=-t-1,\qquad \pi:\ x-y+z=1;$

в) $l:\ x=-2t+2,\ y=2t-1,\ z=4t+3,\quad \pi:\ x-y+2z=1;$

г) $l:\ -x+y+z=0,\ 2x+y-z=2,\qquad \pi:\ 4x-2y+6z=1;$

д) $l: \ 2x-y+4z=7, \ -3x-y-z=4, \qquad \pi: \ x-y+z=4;$

е) $l: \ x-2y+2z=1, \ x-3y+2z=-2, \qquad \pi: \ x-y+3z=0.$

21. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l

а) $A(-1,1,1), \qquad l: \ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$; б) $A(1,-3,-2), \quad l: \ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$.

22. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно плоскости, содержащей прямые l_1 и l_2

а) $A(1,2,1), \quad l_1: \ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z+1}{1}, \quad l_2: \ \dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-5}{-6}=\dfrac{z-2}{2};$

б) $A(7,-1,4), \quad l_1: \ \dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-6}{3}, \quad l_2: \ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-9}{1}.$

23. Написать уравнение плоскости, ортогональной полосе между двумя параллельными прямыми l_1 и l_2, проходящей через срединную прямую этой полосы

а) $l_1: \ x=t+1, \ y=2t-2, \ z=-t+3, \qquad l_2: \ x=2t-1, \ y=4t+2, \ z=-2t-3$;

б) $l_1: \ x=2t-1, \ y=-3t+3, \ z=t-4, \qquad l_2: \ x=6t+3, \ y=-9t, \ z=3t-3.$

24. Написать уравнение прямой, перпендикулярной параллельным прямым l_1 и l_2 и проходящей через начало координат

а) $l_1: \ x=-t+1, \ y=t-2, \ z=-t-1, \qquad l_2: \ x=-2t-4, \ y=2t+4, \ z=-2t;$

б) $l_1: \ x=3t-2, \ y=6t+3, \ z=-t, \qquad l_2: \ x=3t-3, \ y=6t-1, \ z=-t+1.$

25. Написать уравнение высоты тетраэдра, отсекаемого плоскостью π от первого координатного угла

а) $\pi: \ x+y+z=1$; б) $\pi: \ 2x+y+z=2$.

26. Написать уравнение перпендикуляра из точки A к плоскости π.

а) $A(-4,1,0),\ \pi: 3x - y + 2z = 6;$ б) $A(3,-1,2),\ \pi: x - 2y + 4z = 8.$

27. Что можно сказать о положении плоскости

$$\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z) = 0,$$

где $f(x,y,z) = 0,\ g(x,y,z) = 0$ - уравнения плоскостей,
$\alpha \ge 0,\ \beta \ge 0,\ \alpha + \beta = 1,$ в случае

а) параллельности плоскостей $f(x,y,z) = 0,\ g(x,y,z) = 0$;

б) пересечения плоскостей $f(x,y,z) = 0,\ g(x,y,z) = 0$.

Тема 10. Отображения и преобразования. Операции над отображениями. Обратное отображение. Перестановки и подстановки

Основные определения и обозначения

Пусть заданы непустые множества X и Y произвольной природы. Будем говорить, что задано *отображение* f множества X в множество Y, если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие единственный элемент y множества Y.

Будем использовать следующие обозначения:

$$f: X \to Y,\ y = f(x).$$

Элемент x будем называть *прообразом* элемента y , а элемент y - *образом* элемента x при этом отображении.

Если заданы два отображения $f, g: X \to Y$, то считаем их *равными:* $f = g$, если $f(x) = g(x)$ для всех элементов x множества X.

Множество

$$\{f(x):\ x \in X\} = f(X)$$

называют *образом* множества X при отображении f.

Если $y \in Y$, то через $f^{-1}(y)$ будем обозначать множество всех прообразов элемента y - это так называемый *полный прообраз* элемента y.

Отображение $f: X \to Y$ назовем *инъективным*, если образы двух различных элементов различны, т.е. если

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Полный прообраз каждого элемента *y* инъективного отображения либо пуст, либо состоит из одного элемента.

Отображение $f: X \to Y$ назовем *сюръективным*, если каждый элемент множества *Y* имеет прообраз, т.е. если $f(X) = Y$.

Отображение, являющееся и инъективным, и сюръективным, будем называть *биективным*.

У биективного отображения каждый элемент множества Y имеет ровно один прообраз.

Биективное отображение устанавливает *взаимно-однозначное соответствие* между множествами X и Y.

Если $X = Y$, т.е. если f – отображает множество X *в себя*, то отображение f называют *преобразованием* множества X.

Операции над отображениями

Пусть заданы два отображения

$$f: X \to Y, \quad g: Y \to Z, \tag{1}$$

Equation Section (Next)

где X, Y, Z - произвольные непустые множества.

Произведением $g \cdot f$ этих отображений назовем отображение $h: X \to Z$, заключающееся в последовательном применении отображений f и g:

$$(g \cdot f)(x) = g(f(x)). \tag{2}$$

Equation Section (Next)

Очевидно, если f и g - преобразования множества X , то $f \cdot g$ и $g \cdot f$ также являются преобразованиями этого же множества.

Из определения сразу вытекает ассоциативность этой операции. Действительно, если задано еще $h: Z \to V$, то, очевидно,

$$h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f \text{ .Equation Section (Next)} \quad (3)$$

Ассоциативность произведения позволяет последовательно определить произведение любого числа отображений.

Коммутативность произведения отображений, вообще говоря, не имеет места даже в том случае, если оба произведения $f \cdot g$ и $g \cdot f$ определены (как это имеет место, например, для преобразований f, g одного и того же множества).

Пусть, например, $X = \{0,1\}$. Определим отображения f и g следующим образом:

$$f(1) = 0,\ f(0) = 1,\ g(0) = g(1) = 0 .$$

Тогда $(g \cdot f)(0) = g(1) = 0$, $(f \cdot g)(0) = f(0) = 1$, и, таким образом, $g \cdot f \neq f \cdot g$.

Если обозначить через *e* тождественное преобразование, т.е. отображение, оставляющее каждый элемент неизменным:

$$e(x) = x \ \ (\forall x \in X),$$ Equation Section (Next)(4)

то, очевидно, для любого другого преобразования f того же множества справедливо

$$f \cdot e = e \cdot f = f .$$

Другой пример коммутативности умножения дают степени преобразования *f*.

Назовем k-ой *степенью* ($k \geq 0$, k - целое) f^k преобразования f произведение из k сомножителей, каждый из которых равен f. По определению будем считать $f^0 = e$.

Тогда, очевидно, для любых целых неотрицательных k *и* l справедливо

$$f^k f^l = f^l f^k = f^{k+l} .$$

Следующее утверждение показывает, что свойства инъективности и сюръективности наследуются при умножении отображений.

Утверждение 1. Произведение инъективных (сюръективных) отображений инъективно (сюръективно).

Доказательство этого утверждения вытекает напрямую из соответствующих определений. Вспоминая определение биективного отображения, получаем

Следствие 1. Произведение биективных отображений биективно.

Обратное отображение

Пусть задано отображение $f : X \to Y$. Если найдется такое отображение $g : Y \to X$, что

$$g \cdot f = e_X \qquad f \cdot g = e_Y, \quad (5)$$

Equation Section (Next)

где e_X, e_Y - тождественные преобразования соответственно множеств X и Y, то отображение g называется *обратным* к отображению f.

Очевидно, исходное отображение f в свою очередь является обратным к отображению g, поэтому можно говорить о паре взаимно обратных отображений f и g.

Условия существования обратного отображения полностью характеризует следующее

Утверждение 2. Обратное отображение существует тогда и только тогда, когда исходное отображение биективно.

Таким образом, нахождение обратного отображения сводится к решению уравнения

$$f(x) = y$$

относительно x при заданных $y \in Y$ и f.

Будем обозначать отображение, обратное к отображению f, через f^{-1}.

Очевидно, $e^{-1} = e$.

Поскольку произведение биективных отображений биективно, и, следовательно, имеет обратное, возникает вопрос, как связано отображение, обратное к произведению, с отображениями, обратными к сомножителям. Ответ на этот вопрос дает следующее

Утверждение 3. Пусть $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$ - биективные отображения, тогда

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}.$$

Перестановки и подстановки

Пусть задано произвольное конечное множество X произвольной природы, содержащее не менее двух элементов: $|X| = n \geq 2$.

Подстановкой множества X будем называть произвольное биективное преобразование множества X.

Перестановкой множества X будем называть любой образ множества X при этом преобразовании, т.е. одну из нумераций элементов множества X.

Зафиксировав одну из нумераций множества X в качестве исходной, можно отождествить множество X с множеством $\{1,2,\ldots,n\}$. В этом случае подстановка задается таблицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \quad \textbf{Equation Section (Next)}(6)$$

где $i_k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $i_k \neq i_e$ при $k \neq e$.

Эта таблица указывает, что при данном преобразовании множества $\{1,2,\ldots,n\}$ числу s соответствует число $i_s (s \in \{1,2,\ldots,n\})$.

Конечно, порядок следования пар $s,\ i_s$ (т.е. столбцов таблицы (6)) может быть произвольным.

Подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ будем называть *тождественной*.

Подстановки считаем *равными*, если они задают одно и то же преобразование. В частности, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, преобразование, обратное к (6), имеет вид

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что число различных подстановок совпадает с числом различных перестановок.

Для множества из двух элементов возможны только две перестановки: $(1,2)$ и $(2,1)$; множество из трех элементов допускает уже шесть перестановок: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ $(3,2,1)$.

В общем случае количество перестановок (подстановок) дает

Утверждение 4. Количество различных перестановок (подстановок) множества $\{1,2,\ldots,n\}$ равно $n!$

Это утверждение легко доказывается индукцией по числу элементов *n.*

Будем говорить, что число i_k образует *инверсию* с числом i_e в перестановке

$$(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_e, \cdots, i_n)\ , \quad \textbf{Equation Section (Next)} \tag{7}$$

если $i_k > i_e$.

Перестановку назовем *четной*, если она содержит четное количество инверсий, и *нечетной* – в противном случае.

Очевидно, исходная перестановка $(1,2,\ldots,n)$ является четной.

Пусть $i_k \neq i_e$. Будем говорить, что перестановка

$$(i_1,\ i_2,\ldots,\ i_e,\ldots,\ i_k,\ldots,\ i_n)$$ **Equation Section (Next)** (8)

получена транспозицией $(i_k,\ i_e)$ из перестановки (7).

Очевидно, транспозиция $(i_k,\ i_e)$ задается подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i_k & \ldots & i_e & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & i_e & \ldots & i_k & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Двойная транспозиция возвращает исходную подстановку (перестановку), поэтому всякая транспозиция сама является обратной по отношению к себе:

$$(i_k,\ i_e)\cdot(i_k,\ i_e) = e.$$ **Equation Section (Next)**(9)

Рассмотрим перестановки из трех элементов. Очевидно, перестановки

$$(1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2)$$ **Equation Section (Next)**(10)

- четные, а перестановки

$$(1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,2,1)$$ **Equation Section (Next)**(11)

- нечетные. Нетрудно заметить, что каждая из перестановок (10) получается одной транспозицией из некоторой перестановки (11), и наоборот, каждая из перестановок (11) получается одной транспозицией из некоторой перестановки (10), т.е. в данном случае транспозиция нечетную перестановку превращает в четную и наоборот.

Как показывает следующее утверждение, это свойство верно и в общем случае.

Утверждение 5. Однократная транспозиция меняет характер четности перестановки на противоположный.

Очевидным следствием предыдущего утверждения является

Утверждение 6. Число всех четных (нечетных) перестановок равно $n!/2$.

Всякая транспозиция в перестановке опять дает перестановку. Возникает вопрос: а все ли перестановки можно получить таким образом? Ответ на этот вопрос дает следующее

Утверждение 7. От любой исходной перестановки к любой другой можно перейти последовательным применением конечного числа транспозиций.

Вернемся к рассмотрению свойств подстановок.

Всякое произведение (т.е. последовательное выполнение) транспозиций, конечно, является подстановкой. Возникает вопрос, справедливо ли обратное: всякая ли подстановка представима в виде произведения транспозиций.

Как мы видели, тождественная подстановка есть произведение любых двух одинаковых транспозиций. Вопрос о возможности представления любой другой подстановки в виде произведения транспозиций по сути решен утверждением 7 о перестановках, поскольку произведение транспозиций – это их последовательное выполнение, а подстановку можно трактовать как переход от одной перестановки к другой.

Поэтому справедливо

Утверждение 8. Всякую подстановку конечного множества из двух и более элементов можно разложить в произведение конечного числа транспозиций.

Алгоритм поиска разложения подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

достаточно прост: если подстановка не является тождественной, то последовательно отыскиваются транспозиции, переводящие исходную перестановку $(1,2,\ldots,n)$ в перестановку $(i_1,\ i_2,\ldots,\ i_n)$. Для этого сначала, если $i_1 \neq 1$, берем транспозицию $(1,i_1)$ и применяем ее к аргументу - перестановке $(1,2,\ldots,n)$; далее повторяем этот шаг для полученного результата – перестановки $(1,i_1)\,(1,2,\ldots,n)$, точнее, для ее части, начиная со второго места, т.к. на первом месте у нее уже стоит нужное значение i_1, и так далее, до последней позиции.

Представление подстановки в виде произведения транспозиций не является однозначным. Так, например, используя описанный выше алгоритм, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1,3)\ (1,2)\ (2,4).$$

Но, как нетрудно проверить, справедливо также разложение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (3,4)\ (2,3)\ (1,3)$$

с тем же числом транспозиций-сомножителей.

Существуют разложения и с бóльшим числом сомножителей, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (3,4)\ (2,4)\ (1,3)\ (2,4)\ (1,2).$$

Таким образом, число сомножителей в произведении не является инвариантом подстановки.

Но число сомножителей у приведенных выше разложений этой подстановки на сомножители (соответственно 3 и 5) нечетно, и это не случайно. Действительно каждая транспозиция меняет четность соответствующей перестановки, поэтому четность числа сомножителей определяется четностью нижней перестановки в подстановке. Итак, справедливо

Утверждение 9. Четность числа транспозиций у всех разложений подстановки в произведение транспозиций одна и та же.

Будем называть подстановку *четной*, если число транспозиций четное, и *нечетной* – в противном случае

Очевидно, единичная подстановка e – четная.

Утверждение 10. Произведение двух четных (нечетных) подстановок также является четной подстановкой.

Утверждение 11. Произведение четной и нечетной подстановок является нечетной подстановкой.

Утверждение 12. Подстановка, обратная к четной (нечетной), также является четной (нечетной).

Задачи и упражнения

Задача 1. Определить четность перестановки (2, 1, 6, 3, 7, 5, 4).

Решение. Перечислим элементы, дающие инверсии.

Элементы $i_2 = 1,\ \ i_4 = 3,\ \ i_7 = 4$ не создают инверсий;

элемент $i_1 = 2$ имеет одну инверсию с элементом $i_2 = 1$;

элемент $i_3 = 6$ имеет три инверсии с элементами $i_4 = 3,\ \ i_6 = 5,\ \ i_7 = 4$;

элемент $i_5 = 7$ имеет две инверсии с элементами $i_6 = 5,\ \ i_7 = 4$;

наконец, элемент $i_6 = 5$ имеет инверсию с элементом $i_7 = 4$.

Всего, таким образом, имеется 7 инверсий, и, следовательно, данная перестановка является нечетной.

Задача 2. Разложить подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

в произведение транспозиций.

Решение. В соответствии с изложенным выше алгоритмом, сначала ставим на нужное (первое) место цифру 2, т.е. первая подстановка – (1, 2).

В полученной подстановке $(2, 1, 3, 4, 5, 6, 7)$ на втором месте уже стоит нужная цифра 1, поэтому переходим к третьей позиции: вместо находящейся там цифры 3 должна быть цифра 6, поэтому следующая транспозиция $(3, 6)$, получаем перестановку $(2, 1, 6, 4, 5, 3, 7)$.

На четвертой позиции вместо цифры 4 должна быть цифра 3, поэтому следующая транспозиция (3, 4), результат – перестановка (2, 1, 6, 3, 5, 4, 7).

После транспозиции $(5, 7)$ получаем перестановку $(2,1,6,3,7,4,5)$, которую последняя транспозиция $(4, 5)$ превращает, наконец, в итоговую перестановку $(2, 1, 6, 3, 7, 5, 4)$.

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1,2)\ (3,6)\ (3,4)\,(5,7)\ (4,5).$$

Мы видим, что число сомножителей-транспозиций (равное пяти) является нечетным в полном соответствии с доказанной в предыдущей задаче нечетностью перестановки $(2, 1, 6, 3, 7, 5, 4)$.

Задача 3. Перейти от перестановки (1, 2, 3, 4, 5) к перестановке (5, 4, 3, 2, 1), используя транспозиции только соседних элементов.

Решение. Имеем:

$$(1, 2, 3, 4, 5) \to (1, 2, 3, 5, 4) \to (1, 2, 5, 3, 4) \to (1, 5, 2, 3, 4) \to (5, 1, 2, 3, 4) \to (5, 1, 2, 4, 3) \to$$
$$\to (5, 1, 4, 2, 3) \to (5, 4, 1, 2, 3) \to (5, 4, 1, 3, 2) \to (5, 4, 3, 1, 2) \to (5, 4, 3, 2, 1).$$

Итак, получаем разложение подстановки в произведение транспозиций лишь соседних элементов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (5,4)\ (5,3)\ (5,2)\ (5,1)\ (4,3)\ (4,2)\ (4,1)\ (3,2)\ (3,1)\ (2,1)\,.$$

Заметим, что в этой цепочке перестановок происходит чередование их четностей, от четной исходной перестановки (0 инверсий) до четной итоговой (10 инверсий). Четности исходной и итоговой перестановок совпадают, поскольку потребовалось четное (равное 10) количество транспозиций.

Упражнения

1. Определить четность перестановки

а) (2, 1, 4, 3); б) (4, 3, 5, 1, 2);

в) (7, 1, 4, 5, 3, 2, 6); г) (2, 4, 6, 1, 3, 5).

2. Определить, при каких значениях n перестановка четна:

а) (1, 3, 5,…, 2n–1, 2, 4, 6,…, 2n); б) (2, 4, 6, …,2n, 1,3,5,…,2n–1).

3. Найти произведения $\sigma_1\sigma_2$ и $\sigma_2\sigma_1$ подстановок σ_1 и σ_2. Убедиться в том, что $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$.

а) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти произведение транспозиций

а) (1, 3) (2, 4) (1, 5) (2, 3); б) (1, 4) (5, 7) (2, 3) (6, 7) (1, 2).

5. Для подстановки σ найти обратную подстановку σ^{-1}. Проверить равенство $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

а) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Разложить в произведение транспозиций и определить четность подстановки

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Упорядочить все перестановки четвертого порядка в порядке возрастания инверсий.

Тема 11. Общая теория определителей. Матрицы и операции над ними. Определение и простейшие свойства определителя. Свойства определителей. Разложение определителя по минорам и алгебраическим дополнениям. Определитель произведения матриц. Обратимые и невырожденные матрицы

Матрицы и операции над ними

Рассмотрим произвольную таблицу действительных чисел, состоящую из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Будем называть ее *матрицей размера* $m \times n$. Иногда для краткости удобно обозначать матрицу (1), используя ее общий элемент a_j^i, в виде $A = \left[a_j^i \right]$; при этом верхний индекс i элемента a_j^i - это номер строки, а нижний j - номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Пусть A и B – две матрицы одинакового размера.

Назовем матрицу, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B, их *суммой*: $A+B=\left[a_j^i+b_j^i\right]$.

Произведением матрицы на число назовем матрицу, элементы которой получены умножением соответствующих элементов исходной матрицы на это число: $\alpha\cdot A=\left[\alpha\cdot a_j^i\right]$.

Нулевой матрицей называется матрица, состоящая сплошь из нулей: $O=[0]$.

Если число строк матрицы совпадает с числом столбцов: $m=n$, то эта матрица называется *квадратной размера (порядка, размерности) n*. Размер матрицы A обозначается $\dim(A)$.

Пусть дана квадратная матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}$$

порядка *n*.

Будем называть цепочку чисел $a_1^1,\ a_2^2,...,\ a_n^n$, идущую из левого верхнего угла в правый нижний, *главной диагональю* матрицы, а цепочку $a_n^1,\ a_{n-1}^2,\dots,\ a_1^n$ из правого верхнего угла в левый нижний,– *побочной диагональю*.

Квадратную матрицу, имеющую нулевые элементы вне главной диагонали, будем называть *диагональной.*

Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице, называется *единичной:*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть матрицы A и B имеют размеры $p \times q$ и $q \times r$ соответственно.

Назовем их *произведением* $A \cdot B$ матрицу C размера $p \times r$ с элементами

$$c_j^i = \sum_{t=1}^{q} a_t^i \, b_j^t \;\; (i \in \{1, 2, ..., p\};\; j \in \{1, 2, ..., r\}).$$

Таким образом, произведение $A \cdot B$ определено только в том случае, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

В частности, оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ всегда определены для квадратных матриц одинакового порядка.

Очевидным следствием определения умножения являются равенства

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Даже если определены оба произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$, они могут и не совпадать, т.е. коммутативность умножения матриц в общем случае отсутствует.

Так, если

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

то $A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 6 & -4\end{bmatrix}$, $B\cdot A=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 3 & -1\end{bmatrix}$, т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$. Более того, коммутативность умножения является здесь скорее исключением, нежели правилом.

Вместе с тем имеет место *транзитивность* умножения матриц. Если даны три матрицы P, Q, R соответственно размеров $p\times q$, $q\times r$, $r\times s$, то определены попарные произведения PQ, QR (соответственно размеров $p\times r$, $q\times s$) и справедливо равенство

$$(PQ)R=P(QR),$$

показывающее, что результат умножения трех матриц, взятых в определенном порядке, не зависит от очередности выполнения операций умножения.

Таким образом, можно, говорить о произведении PQR трех матриц.

Свойство (4) легко обобщается на произвольное количество сомножителей, что позволяет ввести произведение произвольного числа матриц, размеры которых согласованы.

Матрица A^T называется *транспонированной* по отношению к исходной матрице A, если она получается из нее операцией *транспонирования* – заменой строк (столбцов) матрицы ее столбцами (строками) с теми же номерами:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{bmatrix}.$$

Если матрица $P = \left[p_j^i \right]$ имеет размер $1 \times n$, то получаем строку

$$P = \left[p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1 \right]$$

длины *n*, если матрица $Q = \left[q_j^i \right]$ имеет размер $m \times 1$, получаем столбец $Q = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ \vdots \\ q_1^m \end{bmatrix}$ длины m.

Очевидно, транспонирование превращает строку в столбец, и обратно, столбец в строку. Поэтому столбец для экономии места мы будем иногда обозначать в виде транспонированной строки: $Q^T = \left[q_1^1,\ q_1^2, \ldots,\ q_1^m\right]$.

Матрица, не меняющаяся при транспонировании, называется *симметричной.* У симметричной матрицы элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны: $a_j^i = a_i^j$ $(i,\ j = 1,\ \ldots,\ n)$.

Матрица, элементы которой, симметричные относительно главной диагонали взаимно противоположны ($a_j^i = -a_i^j$, $i,\ j = 1, \ldots, n$), называется *кососимметричной.*

Матрица, имеющая нули ниже главной диагонали, называется *верхней треугольной:*

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ 0 & 0 & & 0 & a_n^n \end{bmatrix}$$

Соответственно *нижняя треугольная* матрица имеет нули выше главной диагонали:

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_1^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & 0 \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{bmatrix}$$

Верхнюю и нижнюю треугольные матрицы будем называть *треугольными*.

Определение и простейшие свойства определителя

В этом параграфе мы обобщим понятие определителя на случай произвольной квадратной матрицы таким образом, чтобы, с одной стороны, данные ранее определения для матриц второго и третьего порядков оказались частным случаем общего определения, и с другой стороны, чтобы это понятие оказалось, в частности, таким же эффективным инструментом исследования и решения систем линейных уравнений произвольного порядка.

Пусть дана квадратная матрица

$$A=\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}$$

порядка n.

Всякое произведение ее элементов, взятых по одному в каждой строке и каждом столбце, можно записать в виде

$$a_{j_1}^1\, a_{j_2}^2 \ldots\, a_{j_n}^n\,,$$

где

$$(j_1,\, j_2, \ldots,\, j_n)$$

- некоторая перестановка чисел $1,\ 2,\ldots,n$.

Назовем *определителем* $|A|$ матрицы A сумму всевозможных произведений (6) со знаком плюс, если перестановка (7) четная, и со знаком минус, в противном случае.

Если t – число инверсий соответствующей перестановки, то определитель можно записать в виде

$$|A| = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^t a^1_{j_1} a^2_{j_2} \ldots a^n_{j_n}\,.$$

Таким образом, определитель – это сумма $n!$ Слагаемых (6), половина из которых берется с тем же знаком, половина – с противоположным.

Порядком определителя будем называть порядок соответствующей матрицы.

Мы будем использовать также такие обозначения:

$$|A| = \det A = \det(a^i_j) = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix}.$$

Очевидно, данное определение вполне согласуется с введенными выше понятиями определителей первого, второго и третьего порядков:

$$|a^1_1| = a^1_1, \qquad \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1\,,$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_2^1 a_3^2 a_2^3 + a_3^1 a_1^2 a_2^3 - (a_3^1 a_2^2 a_1^3 + a_2^1 a_1^2 a_3^3 + a_1^1 a_3^2 a_2^3)$$

Определители более высоких порядков вычислять с помощью данного определения достаточно сложно, так как число слагаемых стремительно растет с увеличением порядка матрицы; так, уже для вычисления определителя матрицы шестого порядка необходимо суммировать 720 слагаемых. Поэтому возникает необходимость изучения свойств определителей с целью упрощения вычислений.

Некоторые простейшие свойства вытекают непосредственно из определения.

Утверждение 1.. Определитель матрицы, содержащей нулевую строку или столбец, равен нулю.

Действительно, в этом случае каждое слагаемое будет обязательно иметь сомножителем нуль из этой строки или столбца, и, следовательно, само будет равно нулю.

В частности, определитель нулевой матрицы равен нулю: $|O| = 0$.

Утверждение 2. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n .$$

Действительно, все остальные слагаемые обязательно будут содержать нулевой сомножитель.

В частности, определитель единичной матрицы равен единице: $|E| = 1$.

Очевидно, справедливо

Утверждение 3. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n .$$

Свойства определителей

В первую очередь нас будут интересовать преобразования, не меняющие величины определителя, условия равенства определителя нулю, а также его изменения при некоторых простейших преобразованиях матрицы.

Утверждение 4. Транспонирование матрицы не меняет величины ее определителя.

Это утверждение позволяет доказывать свойства определителей, например, только для операций над строками.

Утверждение 5. Перестановка двух строк матрицы меняет знак определителя на противоположный.

Доказательство. Перестановка строк с номерами k и l (пусть, например, $k<l$) приведет к замене произвольного произведения

$$a^1_{j_1}\dots a^k_{j_k}\dots a^l_{j_l}\dots a^n_{j_n}$$

исходного определителя произведением

$$a^1_{j_1}\dots a^k_{j_e}\dots a^e_{j_k}\dots a^n_{j_n}.$$

Соответствующая подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_l & \dots & j_k & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

получается из исходной подстановки транспозицией (j_k, j_l) и, следовательно, имеет четность, противоположную четности исходной подстановки (Утверждение 5 темы 10). Утверждение доказано.

Утверждение 6. Определитель матрицы, содержащей две одинаковые строки, равен нулю.

Доказательство вытекает из того факта, что перестановка двух одинаковых строк не меняет величины определителя, хотя, по предыдущему утверждению, должна поменять знак.

Утверждение 7. Общий множитель элементов строки можно выносить за знак определителя.

Доказательство. Действительно, умножение всех элементов строки на какой-либо множитель приводит к его появлению в качестве сомножителя у каждого из слагаемых (8), из которых состоит определитель.

Утверждение 8. Определитель матрицы, содержащей две пропорциональные строки, равен нулю.

Доказательство. Каждый элемент одной строки такой матрицы получается из элементов другой строки умножением на некоторый общий множитель. Используя предыдущее свойство, получаем определитель матрицы, имеющий две одинаковые строки, который, в силу утверждения 6, равен нулю.

Утверждение 9. Если каждый элемент одной из строк определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, первый из которых содержит на месте этой строки первые слагаемые, второй – вторые слагаемые; остальные строки обоих определителей те же, что и в исходном определителе.

Доказательство вытекает из того факта, что каждое слагаемое (8) содержит сумму двух слагаемых на месте сомножителя, соответствующего указанной строке.

Утверждение 10. Определитель не изменится, если к любой строке прибавить любую другую строку, умноженную на произвольный коэффициент.

Доказательство. На основании предыдущего свойства определитель равен сумме двух определителей, один из которых – исходный, а второй равен нулю согласно утверждению 8.

Назовем *линейной комбинацией* строк матрицы строку, элементы которой равны сумме соответствующих элементов этих строк, умноженных на произвольный (общий для строки) коэффициент.

Многократным применением этого свойства получаем

Утверждение 11. Определитель не изменится, если к любой его строке прибавить произвольную линейную комбинацию других строк.

Теперь нетрудно получить достаточное условие равенства определителя нулю, которое, как будет показано в дальнейшем, является и необходимым.

Утверждение 12. Определитель, одна из строк которого есть линейная комбинация других строк, равен нулю.

Доказательство. Вычитая из строки, равной линейной комбинации других строк, ту же линейную комбинацию этих строк, мы, с одной стороны, согласно предыдущему свойству, не изменим величины определителя, а с другой стороны, получим определитель, содержащий нулевую строку, и, следовательно, равный нулю.

Разложение определителя по минорам и алгебраическим дополнениям

Пусть порядок матрицы $\dim(A)=n$. Введем понятие *минора* – произвольного определителя меньшего порядка, составленного из элементов этой матрицы вычеркиванием некоторых строк и столбцов.

Возьмем произвольное натуральное число k $(k \le n)$ и рассмотрим подмножества I и J множества $\{1,2,\ldots,n\}$ номеров строк и столбцов матрицы A, состоящие из одинакового числа k элементов:

$$I=\{i_1,\ i_2,\ldots,\ i_k\},\quad J=\{j_1,\ j_2,\ldots,\ j_k\}\ .$$

Назовем *минором* k-го порядка (обозначение - M_J^I) определитель $\left|A_J^I\right|$, где матрица A_J^I – подматрица исходной матрицы A, элементы которой стоят на пересечении строк и столбцов с номерами из множеств I и J соответственно.

Будем считать сам определитель $|A|$ единственным минором максимального порядка $k=n$.

При $k<n$ минору $M_J^I = \left|A_J^I\right|$ можно поставить в соответствие так называемый *дополнительный* минор – минор, получающийся из исходной матрицы A вычеркиванием строк и столбцов, содержащихся в матрице A_J^I. Если $I' = \{1,2,...,n\} \setminus I, \quad J' = \{1,2,...,n\} \setminus J$, то дополнительным является минор $M_{J'}^{I'} = \left|A_{J'}^{I'}\right|$.

Очевидно, исходный минор является дополнительным к дополнительному минору.

Элементы матрицы A можно считать минорами первого порядка

Обозначим через $s = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k$ сумму номеров строк и столбцов минора.

Алгебраическим дополнением D_J^I по отношению к элементу a_j^i назовем величину $(-1)^s M_{J'}^{I'}$.

Пусть s' - сумма всех номеров, вошедших в множества I' и J'.

Очевидно, $s + s' = 2(1 + 2 + \ldots + n) = n(n+1)$

- число четное, поэтому четности чисел s и s' совпадают, и для вычисления знака алгебраического дополнения можно брать сумму номеров строк и столбцов, вошедших в дополнительный минор:

$$D_J^I = (-1)^{s'} M_{J'}^{I'}.$$

Теорема Лапласа. Пусть в квадратной матрице выделены k строк. Определитель равен сумме произведений всех миноров порядка k, содержащихся в указанных k строках, на их алгебраические дополнения:

$$|A| = \sum_{J:\,|J|=k} M_J^I \cdot D_J^I.$$

Здесь через $|J|$ обозначено количество элементов множества J.

Используя миноры первого порядка ($k = 1$), получаем

Следствие 1. Определитель равен сумме произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения.

Обозначая $D_{\{j\}}^{\{i\}} = D_j^i$, получаем:

$$|A| = a_1^i D_1^i + a_2^i D_2^i + \ldots + a_n^i D_n^i.$$

Аналогично получаем разложение определителя по произвольному столбцу:

$$|A| = a_j^1 D_j^1 + a_j^2 D_j^2 + \ldots + a_j^n D_j^n.$$

Таким образом, следствие 1 позволяет свести вычисление определителя порядка n к нахождению n определителей порядка $n-1$.

Величину

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

называют символом Кронекера. Докажем

Утверждение 13. Справедливы следующие равенства

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i D_j^k = \delta_k^i \left|A\right|,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_j^i D_e^i = \delta_e^j \left|A\right|$$

<u>Доказательство</u>. Нетрудно заметить, что сумма (13) есть сумма произведений элементов строки матрицы на алгебраические дополнения этих элементов (при $i = k$) или элементов другой строки (при $i \neq k$). В первом случае, как это доказано предыдущим следствием, получаем $\left|A\right|$, а во втором сумма (13) есть разложение по k-ой строке определителя матрицы, которая получена из матрицы A дублированием i-ой строки на месте k-ой строки. Этот определитель равен нулю, как содержащий две одинаковые строки.

Аналогично доказывается (14) – здесь осуществляется разложение по столбцу.

Определитель произведения матриц

Пусть имеются две квадратные матрицы A и B одного и того же порядка. Следующее утверждение сводит вычисление определителя произведения матриц к вычислению определителей матриц – сомножителей.

Утверждение 14. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

Обратимые и невырожденные матрицы

Напомним, что квадратная матрица A называется *обратимой*, если существует обратная к ней - такая матрица A^{-1}, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E .$$

В случае существования обратной матрицы она является единственной.

Будем называть квадратную матрицу *вырожденной,* если ее определитель равен нулю; в противном случае будем называть ее *невырожденной*. Оказывается, свойства невырожденности и обратимости матриц эквивалентны.

Утверждение 15. Матрица является обратимой тогда и только тогда, когда она невырожденная.

Доказательство. Необходимость.

Пусть матрица A обратима, т.е. выполнено свойство (15).

Согласно предыдущему утверждению,

$$\left|AA^{-1}\right| = |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = |E| = 1,$$

т.е. $|A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1$. Отсюда вытекает, что $|A| \neq 0$, и матрица $|A|$ – невырожденная.

Попутно мы получили, что

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}.$$

Достаточность. Пусть матрица A является невырожденной. Покажем, что матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} D_1^1 & D_1^2 & \cdots & D_1^n \\ D_2^1 & D_2^2 & \cdots & D_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_n^1 & D_n^2 & \cdots & D_n^n \end{bmatrix}$$ (1

является обратной к матрице A. Найдем произведение $A \cdot A^{-1} = \left[\alpha_j^i\right]$. Очевидно, в силу (13)

$$\alpha_j^i = \frac{1}{|A|} \sum_{s=1}^{n} a_s^i D_s^j = \frac{1}{|A|} \delta_j^i |A| = \delta_j^i,$$

таким образом, $AA^{-1} = E$. Аналогично доказывается равенство $A^{-1}A = E$.

Таким образом, обратная матрица A^{-1} существует, т.е. матрица A обратима.

Доказательство завершено.

Задачи и упражнения

Задача 1. Найти квадратную матрицу *A* размерности *n*=4 с общим элементом

$$a_j^i = (i - j)^2 - n\,,$$

где *i, j* – соответственно номера строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_j^i.

Решение. Поскольку $a_j^i = a_i^j$ (т.е. матрица является симметричной), то достаточно найти элементы по одну сторону от главной диагонали:

$$a_1^1 = a_2^2 = a_3^3 = a_4^4 = -4\,,\ a_2^1 = a_3^2 = a_4^3 = -3\,,\ a_3^1 = a_4^2 = 0\,, a_4^1 = 5\,.$$

Итак, матрица *A* имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 & 5 \\ -3 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \\ 5 & 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Задача 2. Найти матрицу A^T, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Строки матрицы A^T - это столбцы матрицы *A*, поэтому

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 3. Найти матрицу $C = 2A + 3B + 4E$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, *E* – единичная матрица.

Решение. Имеем

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix},\ 3B = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix},\ 4E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

поэтому

$$C = \begin{bmatrix} 6 + (-3) + 4 & -2 + 3 \\ 4 + (-6) & -8 + 9 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Задача 4. Выяснить, имеет ли смысл произведение *AB* и *BA*, где

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

в случае положительного ответа найти произведения.

Решение. Поскольку размеры матриц *A* и *B* равны соответственно 3×2 и 2×4, то определено лишь произведение *AB* (число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*, т.е. двум).

Далее, имеем

$$AB = \begin{bmatrix} (-2)4 + 1(-1) & (-2)2 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 1(-1) & -2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + 0(-1) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0(-1) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + (-3)(-1) & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-3)(-1) & 1 \cdot 0 + (-3)3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -4 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Задача 5. Вычислить определитель матрицы *A*, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

по правилу «треугольников».

Решение. Имеем:

$$|A| = (1\cdot 5\cdot 2 + (-3)\cdot 1\cdot(-3) + 2\cdot 4\cdot 7) - (7\cdot 5\cdot(-3) + (-3)\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 4\cdot 1) = 75 - (-113) = 188.$$

Задача 6. Найти минор и алгебраическое дополнение к элементу a_3^2 матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение. Минор для элемента $a_3^2 = -2$ получается вычеркиванием второй строки и третьего столбца, на пересечении которых он находится:

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя ко второму столбцу первый, получаем:

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 8.$$

Соответствующее алгебраическое дополнение к элементу a_3^2 может отличаться от величины минора разве что знаком; в данном случае $A_3^2 = (-1)^{2+3} M_3^2 = -8$.

Задача 7. Найти определитель матрицы A, где

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

двумя способами, используя разложение по первой строке и второму столбцу.

Решение. Имеем

$$|A|=a_1^1A_1^1+a_2^1A_2^1+a_3^1A_3^1,$$

где A_j^i - алгебраическое дополнение к элементу a_j^i матрицы A.

В данном случае $a_1^1=2$, $a_2^1=-1$, $a_3^1=3$, $A_1^1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$,

$A_2^1=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2,\ A_3^1=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=8$.

Отсюда

$$|A|=2\cdot(-4)+(-1)\cdot 2+3\cdot 8=14.$$

Используя разложение по второму столбцу, получаем

$$|A|=a_2^1A_2^1+a_2^2A_2^2+a_3^2A_3^2,$$

где $a_2^1=-1$, $a_2^2=-2,\ a_3^3=0$. Поскольку a_2^3=0, нет необходимости вычислять соответствующее алгебраическое дополнение A_2^3, т.к. слагаемое $a_2^3A_2^3$ будет равняться нулю; A_2^1 ранее было найдено:

$$A_2^1=2,\ A_2^2=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-8.$$

Отсюда

$$|A|=-1\cdot 2+(-2)(-8)=14.$$

Таким образом, видно, что для вычисления определителя по строке или столбцу лучше выбирать те из них, которые содержат наибольшее количество нулей, или сначала, используя свойства определителей, не меняющие его величины, получить максимально возможное количество нулей в строке или столбце.

Задача 8. Вычислить определитель матрицы

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

используя преобразования, не меняющие его величины.

Решение. Воспользуемся разложением определителя по строке или столбцу, предварительно обнулив максимальное количество элементов.

Для этого преобразования целесообразно взять строку или столбец, содержащие нулевой элемент; в данном случае это строки и столбцы с номерами 1, 2, 3.

Выберем, например, первую строку. С помощью последнего столбца обнулим в ней первый и третий элементы. Для этого сначала вычтем из первого столбца удвоенный последний:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далее, прибавляя к третьему столбцу последний, получаем:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскрываем определитель по первой строке:

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Заметив, что два элемента последней строки пропорциональны соответствующим элементам первой, прибавим к последней строке полученного определителя удвоенную первую строку, получим

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -(-8)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 8 \cdot 9 = 72.$$

Задача 9. Определить, существует ли для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

обратная; в случае существования найти ее. Проверить, правильно ли найдена обратная матрица, используя ее свойства.

Решение. Обратная матрица существует только для невырожденной (т.е. имеющей ненулевой определитель) матрицы.

Вычитая из второго столбца матрицы A ее первый столбец и раскрывая определитель по второму столбцу, получаем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Поскольку определитель отличен от нуля, матрица A имеет обратную.

Элементы обратной матрицы – это алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы, деленные на величину определителя матрицы A. Для удобства заранее транспонируем матрицу A:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Далее последовательно находим алгебраические дополнения этой матрицы:

$$(A^T)_1^1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6,\ (A^T)_2^1 = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1,\ (A^T)_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$(A^T)_1^2 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ (A^T)_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2,\ (A^T)_3^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$(A^T)_1^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ (A^T)_2^3 = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1,\ (A^T)_3^3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^T)_j^i = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверку правильности решения осуществим двумя способами. Сначала проверим соотношение

$$\left|A^{-1}\right| \cdot |A| = 1.$$

Действительно, прибавляя к первой строке матрицы A^{-1} ее вторую строку, получаем:

$$\left|A^{-1}\right| = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

и

$$|A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \cdot 1 = 1.$$

Но проверенное равенство является только необходимым, но не достаточным условием того, что найденная матрица является обратной.

Полную гарантию правильности решения дает проверка равенств

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E\ ,$$

являющихся определением обратной матрицы. Проверим, например первое равенство. Имеем

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 6\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 3, & 6\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-1)\cdot 4, & 6\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 5 \\ -7\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3, & -7\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 4, & -7\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 5 \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 3, & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 4, & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6-2-3, & 6-2-4, & 6-1-5 \\ -7+4+3, & -7+4+4, & -7+2+5 \\ 2-2+0, & 2-2+0, & 2-1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Второе равенство проверяется аналогично. Итак, матрица A^{-1} найдена верно.

Задача 10. Проверить, всегда ли верно равенство

$$|A+B| = |A| + |B|.$$

Решение. Покажем, что можно подобрать такие матрицы A и B с равными определителями, что определитель их суммы будет равен нулю.

Например

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3 \quad |B| = 3$$
$$|A + B| = |0| = 0$$

Таким образом, для этих двух матриц

$$0 = |A + B| \neq |A| + |B| = 6.$$

Нетрудно заметить, что эту идею можно распространить на все матрицы четных порядков. Действительно, если A – любая невырожденная квадратная матрица четного порядка n и $B = -A$, то $|A| \neq 0$, $A+B=O$ (где O – нулевая матрица), а $|B| = |-A| = (-1)^n |A| = |A| \neq 0$, т.е. $0 = |A + B| = 2|A| \neq 0$.

Упражнения

1. Найти элементы квадратной матрицы $A = \left[a_j^i \right]$ размерности 3, если ее элементы получаются из равенств:

а) $a_j^i = i - 1$; б) $a_j^i = i - j$; в) $a_j^i = \left(i - j \right)^2$.

2. Найти элементы квадратной матрицы $A=\left[a_j^i\right]$ размерности 4, если ее элементы получаются из равенств:

а) $a_j^i=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$; б) $a_j^i=(-1)^{i+j}$; в) $a_j^i=\begin{cases}1, & i\geq j\\ 0, & i<j\end{cases}$;

г) $a_j^i=\begin{cases}0, & i\geq j\\ 1, & i<j\end{cases}$; д) $a_j^i=\begin{cases}1, & i \text{ или } j \text{ четно}\\ 0, & i \text{ и } j \text{ нечетны}\end{cases}$; е) $a_j^i=\begin{cases}1, & |i-j|=2\\ 0, & \text{в противном случае}\end{cases}$.

3. Найти матрицу A^{T}, если

а) $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$; г) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

4. Найти $A-2E$, где

а) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 4\end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & -2\\ -1 & -3 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

5. Найти линейную комбинацию $C=2A+3B$ матриц A и B, где

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$.

6. Найти матрицу A^2, если

а) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

7. Умножить матрицу A на матрицу B. Возможно ли умножение матрицы B на матрицу A?

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

8. Найти AA^{T} и $A^{\mathrm{T}}A$, если

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -7\\ -4 & 1 & 2\end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

9. Найти A^2 для следующих матриц

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$.

10. Найти произведение AB матриц A и B, где

а) $A=\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Всегда ли справедливы следующие свойства:

а) $A^2 \geq O$, б) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

в) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

12. Возможно ли выполнение следующих равенств:

а) $A^2 = O \ (A \neq O)$, б) $A^2 = E$, в) $A^n = A$ (для всех n=1,2,…).

13. Найти все матрицы B, удовлетворяющие условию $AB = BA$, где

а) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

14. Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$.

15. Проверить свойства

а) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

16. Найти все миноры и алгебраические дополнения матрицы A, где

а) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

17. Вычислить определитель третьего порядка, используя правило треугольников

а) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 4\\ 1 & -7 & 1\end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix}8 & -1 & 4\\ -5 & 2 & 0\\ 6 & 3 & 2\end{bmatrix}$;

г) $A=\begin{bmatrix}7 & 1 & -2\\ 2 & 3 & -2\\ 6 & -5 & 1\end{bmatrix}$.

18. Используя свойства определителей, найти

а) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & 9\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ -7 & 9 & -11\\ 13 & -15 & 17\end{vmatrix}$.

19. Вычислить определители задачи 5, используя разложения по строке или столбцу.

20. Вычислить определители матриц задачи 4, используя преобразования, не меняющие величины определителя.

21. Проверить справедливость следующих утверждений:

а) если элементы матрицы – натуральные числа, то и ее определитель является натуральным числом.

б) если элементы матрицы A – целые числа, то и ее определитель является целым числом.

в) если элементы матрицы A – четные числа, то и ее определитель является четным числом.

г) если элементы матрицы A – четные числа, то ее определитель по абсолютной величине больше или равен 2^n, где n – порядок матрицы A

$$\mathrm{mod}\,|A| \geq 2^n.$$

22. Выяснить связь определителей двух взаимно противоположных матриц

23. Каково наибольшее число нулей, которое может содержать невырожденная матрица порядка n?

24. Проверить истинность следующих утверждений

а) $|A-B| = |A| - |B|$; б) $|-A| = -|A|$; в) $|A^2| > 0$; г) $|A^2| > |A|$;

д) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$; е) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$; ж) $A^{-1} \geq 0$ при $A \geq 0$.

25. Найти обратную матрицу A^{-1} в случае ее существования

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; д) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$; е) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

ж) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$; з) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

26. Проверить соотношение $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ для матриц предыдущей задачи.

27. Проверить соотношение $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ для матриц задачи 12.

28. Доказать, что $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

29. Доказать равенство $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$.